VIRGILIU SCHNEIDER

Teste de algebrà

pentru admiterea în învățământul superior

EDITURA "APOLLO"

CRAIOVA 1990

Scanned with OKEN Scanner

VIRGILIU SCHNEIDER

Teste de algebră

pentru admiterea în învățământul superior

EDITURA "APOLLO"
CRAIOVA 1990

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Prezenta lucrare a fost elaborată cu scopul de a veni în sprijinul elevilor din licee care doresc să aprofundeze algebra, precum și a candidaților la concursurile de admitere în învățământul superior.

Prin anumite probleme cu nivel mai ridicat de dificultate, lucrarea se adresează și elevilor care se pregătesc pentru concursurile de matematică.

Lucrarea prezintă 20 de teste, fiecare test fiind format din cîte cinci probleme avînd o concepție unitară.

Testele cuprind o mare diversitate de probleme, constituind un instrument de îmbogățire și aprofundare a cunoștințelor și tehnicilor de rezolvare a problemelor.

În prima parte a lucrării sînt prezentate enunțurile testelor, iar în partea a doua sînt prezentate soluțiile acestora.

Rezolvarea problemelor poate fi făcută și în altă ordine decît cea din enunțuri și apoi să se revină asupra problemelor ce nu au putut fi rezolvate inițial, urmînd ca la rezolvarea acestora să fie consultate și soluțiile problemelor.

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

TESTE DE ALGEBRĂ	ENUNȚ	REZOLVARE
TESTUL 1	5	17
TESTUL 2	6	21
TESTUL 3	6	25
TESTUL 4	7	28
TESTUL 5	7	32
TESTUL 6	8	35
TESTUL 7	9	38
TESTUL 8	9	41
TESTUL 9	10	43
TESTUL 10	10	45
TESTUL 11	11	48
TESTUL 12	11	50
TESTUL 13	12	54
TESTUL 14	12	57
TESTUL 15	13	61
TESTUL 16	13	64
TESTUL 17	14	69
TESTUL 18	15	72
TESTUL 19	15	75
TESTUL 20	16	78

Scanned with OKEN Scanner

ENUNȚURI

I

1. Fie $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbf{R}$ astfel încît

$$p_1 p_2 = 2(q_1 + q_2)$$

Arătați că cel puțin una din ecuațiile:

$$x^2 + p_1 x + q_1 = 0, \quad x^2 + p_2 x + q_2 = 0$$

are rădăcini reale.

2. Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x} = \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$$

3. Să se rezolve ecuația:

$$3^{x+1} + 100 = 7^{x-1}$$

4. Fie G mulțimea matricelor

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix}$$

unde $x \in \mathbf{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

a) Arătați că $(G, \cdot)$ este grup abelian.

b) Pentru x dat să se calculeze A^n, $n \in \mathbf{N}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

5. Fie $x_i \in [0, a]$ pentru $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Să se arate că oricare ar fi permutarea $\sigma \in S_n$, există $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încît

$$x_i(a - x_{\sigma(i)}) \leqslant \frac{a^2}{4}$$

II

6. Fie funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cu proprietățile :

1) $f(-x) = f(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$

2) $f(x + y) \leqslant f(x) + f(y)$, $(\forall)\ x, y \in \mathbf{R}$

Arătați că :

a) $f(x) \geqslant 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$

b) $|f(x) - f(y)| \leqslant f(x - y)$, $(\forall)\ x, y \in \mathbf{R}$

7. Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} \sqrt{3x + y} + \sqrt{x - y} = 6 \\ 3x + \sqrt{x - y} = 17 \end{cases}$$

8. Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încît sistemul următor să aibă soluție unică $(x, y) \in \mathbf{R}^2$:

$$\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

9. Să se rezolve ecuația :

$$X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

unde $X \in S_5$.

10. Fie $(G, .)$ un grup și $(H, .)$ un subgrup propriu al său. Să se arate că nu există o parte stabilă proprie a lui G care să includă $G - H$.

III

11. Să se determine mulțimea

$$M = \left\{ y \in \mathbf{Z} \mid y = \frac{2x^2 + 5x + 9}{2x + 3},\ x \in Q,\ x > 0 \right\}.$$

12. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încît

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + m > 0$$

pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

13. Să se rezolve ecuația :

$$x \cdot 2^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} \cdot 2^{x} = 4.$$

14. Determinați matricele $A \in M_2(\mathbf{R})$, unde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ astfel încît

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & b^n \\ c^n & d^n \end{pmatrix} \text{ pentru orice } n \in \mathbf{N}^*.$$

15. Fie $(G, .)$ un grup și $H = \{x^2 \mid x \in G\}$.

Să se arate că dacă G este abelian, atunci H este subgrup al grupului G. Reciproca este adevărată ?

IV

16. Fie x, y elemente ale unui grup astfel încît $x^3 = y^4 = e$ și $yx = xy^3$. Să se arate că :

a) $y^2x = xy^2$;

b) $y^3x = xy$;

c) $y^{-1}x^{-1}y^{-1} = x^2$.

17. Fie matricele A, $B \in M_n(\mathbf{C})$.

a) Să se arate că dacă $A + B = AB$, atunci $A^m \cdot B^n = B^n \cdot A^m$ pentru orice m, $n \in \mathbf{N}^*$.

b) Dacă $A + B = AB$, $B + C = BC$, $C + A = CA$, atunci $A + B + C = \frac{3}{4} ABC$.

18. Fie funcția :

$$f(x) = \log_{\sqrt{3}-1} (7 - 2\sqrt{x} - x)$$

Să se arate că graficul funcției are un singur punct cu ambele coordonate numere naturale.

19. Fie a, b, c, $d \in \mathbf{N}^*$. Să se arate că

$$\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right)\left(\frac{d}{c} - \frac{b}{a}\right) \in \mathbf{N}^*.$$

20. Să se rezolve ecuația

$$|x - |x - 1|| = (m - 1)x + 1, \; m \in \mathbf{R}.$$

V

21. Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația :

$$\sqrt{x_1 - 1} + 2\sqrt{x_2 - 2^2} + \ldots + n\sqrt{x_n - n^2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

Scanned with OKEN Scanner

22. Arătați că:

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz + x + y + z + \frac{3}{8} \geq 0 \text{ pentru orice } x, y, z \in \mathbf{R}.$$

23. Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încît sistemul:

$$\begin{cases} (x^2 + 1)^a + (b^2 + 1)^y = 2 \\ a + bxy + x^2y = 1 \end{cases}$$

să aibă cel puțin o soluție, oricare ar fi $b \in \mathbf{R}$.

24. Fie matricea $A \in M_n(\mathbf{R})$ și ${}^tA$ transpusa matricei A. Dacă suma elementelor matricei $A \cdot {}^tA$ este 0 atunci $\det A = 0$.

25. Fie $A = (0, +\infty) - \{1\}$ și $a \in A$, $\alpha \in \mathbf{R}^*$. Definim pe A legea de compoziție

$$x * y = x^{\alpha \log_a y}.$$

Notăm $G_{a,\alpha} = (A, *)$.

Să se arate că:

a) $G_{a,\alpha}$ este grup abelian.

b) Dacă $b \in A$, $\beta \in \mathbf{R}^*$ atunci grupurile $G_{a,\alpha}$ și $G_{b,\beta}$ sînt izomorfe.

VI

26. Să se determine funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, astfel încît

$$f(x) \cdot f(y) \cdot f(x - y) = 1, \ (\forall)\ x, y \in \mathbf{R}.$$

27. Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{a + bx} + \sqrt{b + cx} + \sqrt{c + ax} = \sqrt{b - ax} + \sqrt{c - bx} + \sqrt{a - cx},$$

unde $a, b, c \in (0, +\infty)$.

28. Să se arate că toate rădăcinile ecuației:

$$9x^4 + 8x^3 + 14x^2 + 8x + 9 = 0$$

au modulul egal cu 1.

29. Fie matricele $A, B, C \in M_n(\mathbf{C})$. Să se arate că dacă $ABC + AB + BC + AC + A + B + C = 0$ și dacă A și $B + C$ comută, atunci A și BC comută.

30. Fie G mulțimea matricelor de forma

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \text{ cu proprietatea } \det(M_{a,b}) = 1.$$

Să se arate că G este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

Scanned with OKEN Scanner

VII

31. Să se determine toate mulțimile finite $X \subset \mathbf{R}$ cu proprietatea

$$(\forall)\ x \in X \Rightarrow x + |x| \in X.$$

32. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geqslant 3.$$

33. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{27}\right)^y = \frac{5}{6} \\ \log_{\frac{1}{4}} x - \log_{\frac{1}{27}} y = \frac{1}{6} \end{cases}$$

34. Fie matricele $A, B \in M_n(\mathbf{R})$, $n \geqslant 2$ cu proprietatea

$$A^2 + B^2 = AB.$$

Să se arate că, dacă matricea $BA - AB$ este inversabilă, atunci n este multiplu de 3.

35. Să se demonstreze că grupurile $(\mathbf{Z}, +)$ și $(\mathbf{Q}, +)$ nu sînt izomorfe

VIII

36. Să se determine mulțimea

$$A = \left\{ x \in \mathbf{Z} \mid \frac{x^3 - 3x + 2}{2x + 1} \in \mathbf{Z} \right\}.$$

37. Dacă $a < b < c < d$ să se demonstreze inegalitatea

$$(a + b + c + d)^2 > 8(ac + bd).$$

38. Să se arate că, dacă rădăcinile polinomului cu coeficienți complecși

$$P(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_{n-1} X + (-1)^n$$

au același modul, atunci $P(-1) \in R$.

39. Fie matricele $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ astfel încît

$$AB - B^2A^2 = U \text{ și } A^3 + B^3 = 0$$

unde U ste matricea unitate.

Scanned with OKEN Scanner

Să se arate că dacă una din matricele A sau B este inversabilă, atunci există relația:

$$BA - A^2B^2 = U.$$

40. Să se demonstreze că grupurile $(\mathbf{Q}, +)$ și $(\mathbf{R}, +)$ nu sînt izomorfe.

IX

41. Fie M o mulțime formată din n numere întregi (nu neapărat distincte). Arătați că M are cel puțin o submulțime nevidă cu proprietatea că suma elementelor sale se divide cu n.

42. Să se rezolve în R^2 ecuația:

$$x^2y^4 - 16xy^3 - 4xy + x^2 + 68y^2 = 0.$$

43. Să se demonstreze egalitatea:

$$C_m^n \cdot C_n^m + C_{m+1}^m \cdot C_n^{m+1} + \ldots + C_n^m \cdot C_n^n = C_n^m \cdot 2^{n-m}, \text{ unde } m \leqslant n.$$

44. Fie $A, B \in M_n(\mathbf{K})$ astfel încît $AB = BA$. Arătați că $\det(A^2 + B^2) \geqslant 0$.

45. Fie grupul $(G, \cdot)$. Să se arate că dacă există $m, n \in \mathbf{N}^*$, prime între ele astfel încît

$$(xy)^m = (yx)^m \text{ și } (xy)^n = (yx)^n, \ (\forall)\ x, y \in G,$$

atunci grupul G este abelian.

X

46. Fie funcțiile $f: A \to B$ și $g: B \to C$.
Să se arate că:
a) dacă $g \circ f$ este injectivă, atunci f este injectivă
b) dacă $g \circ f$ est surjectivă, atunci g este surjectivă.

47. Fie $a, b \in Q$ astfel încît

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \in \mathbf{Q}^*$$

Să se arate că $\sqrt[3]{a} \in \mathbf{Q}$, $\sqrt[3]{b} \in \mathbf{Q}$.

48. Să se rezolve ecuația:

$$(\log_x 6)^2 + \left(\log_{1/6} \frac{1}{x}\right)^2 + \log_{1/\sqrt{x}} \frac{1}{6} + \log_{\sqrt{6}} x + \frac{3}{4} = 0.$$

49. Fie matricea $A \in M_n(\mathbf{R})$ și matricea $B = A - {}^tA$.
a) Arătați că, pentru $n = 4$, avem $\det B \geqslant 0$.
b) Calculați $\det B$ pentru n impar.

50. Să se demonstreze că grupurile $(\mathbf{Q}^*, \cdot)$ și $(\mathbf{R}^*, \cdot)$ nu sînt izomorfe.

Scanned with OKEN Scanner

XI

51. Fie $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, o funcție cu proprietatea
$$(f\circ f)(x)=x^2,\ (\forall)\ x\in(0,+\infty).$$
Să se arate că:
a) f este bijectivă,
b) $\sqrt{f(x)}=f(\sqrt{x}),\ (\forall)\ x\in(0,+\infty)$.

52. Să se rezolve sistemul de ecuații:
$$\begin{cases} 2y=x+\frac{1}{x} \\ 2z=y+\frac{2}{y} \\ 2x=z+\frac{2}{z} \end{cases}$$

53. Să se rezolve ecuația:
$$4^x+9^x+16^x=6^x+8^x+12^x.$$

54. Fie matricele $A,\ B\in M_n(\mathbf{R}),\ n\geqslant 2$ cu proprietatea $A^2+B^2=0$. Arătați că:
a) Dacă $n=4k,\ k\in\mathbf{N}^*$ atunci $\det(AB-BA)\geqslant 0$.
b) Dacă $n=4k+2,\ k\in\mathbf{N}$ atunci $\det(AB-BA)\leqslant 0$.
c) Dacă $n=4k+1$ sau $n=4k+3, k\in\mathbf{N}^*$ atunci $\det(AB-BA)=0$.

55. Fie grupul $(G,\ .)$. Dacă există $n\in\mathbf{N}^*$ astfel încît funcțiile $f,\ g:G\to G$, $f(x)=x^n,\ g(x)=x^{n+1}$ să fie morfisme surjective de grup, atunci grupul G este abelian.

XII

56. Să se rezolve în $\mathbf{R}^2$ ecuația $x^8+y^8=8xy-6$.

57. Să se rezolve ecuația:
$$\sqrt{mx^2-x+1}+\sqrt{mx^2+x+1}=x,\ \text{unde } m\in\mathbf{R}.$$

58. Să se demonstreze egalitatea:
$$C_n^0-C_n^1+C_n^2-\ldots+(-1)^mC_n^m=(-1)^mC_{n-1}^m.$$

59. Fie $A\in M_3(\mathbf{C})$ astfel încît $AB=BA,\ (\forall)\ B\in M_3(\mathbf{C})$. Să se arate că A are forma $A=aI_3$, unde I_3 este matricea unitate de ordinul trei.

60. Fie $(G,\ .)$ un grup cu proprietățile:
1) dacă $x^2=1$, atunci $x=1$, unde 1 este elementul neutru al grupului;
2) $(xy)^2=(yx)^2,\ (\forall)\ x,y\in\mathbf{G}$.
Să se arate că grupul $\mathbf{G}$ este abelian.

Scanned with OKEN Scanner

XIII

61. Fie funcțiile $f, g : [0, 1] \to \mathbf{R}$. Să se arate că există $x, y \in [0, 1]$ astfel încît $|f(x) + g(y) - 4x^2y| \geqslant 1$.

62. Să se determine x astfel încît

$$\sqrt[3x-1]{\sqrt[8-3x]{(-x)^x}} = \sqrt[5x]{2x}.$$

63. Fie $f \in \mathbf{Z}[X]$. Dacă f ia valoarea 1 pentru cel puțin patru numere întregi distincte, atunci pentru orice $a \in \mathbf{Z}$ avem $f(a) \neq -1$.

64. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x + y + z = -x \\ xy + yz + zx = y \\ xyz = -z \end{cases}$$

65. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu proprietatea $(xy)^3 = x^3y^3$, $(xy)^4 = x^4y^4$, $(xy)^5 = x^5y^5$, $(\forall)\ x, y \in G$. Să se arate că G este abelian.

XIV

66. Să se determine funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, nedentic nulă, astfel încît $f(x) \cdot f(y) = f(x - y)$, $(\forall)\ x, y \in \mathbf{R}$.

67. Fie numerele nenegative: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cu sumă mai mică sau egală decît $\frac{1}{2}$. Să se arate că:

$$(1 - x_1)(1 - x_2) \ldots (1 - x_n) \geqslant \frac{1}{2}.$$

68. Să se determine polinomul $P \in \mathbf{R}[X]$ astfel încît:

$$XP(X - 1) = (X - 10)P(X).$$

69. Fie matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Să se determine A^n, $n \in \mathbf{N}^*$.

70. Fie $(G, \cdot)$ un grup finit cu proprietatea că funcția $f : G \to G$, $f(x) = x^2$ este automorfism. Să se arate că G are un număr impar de elemente.

Scanned with OKEN Scanner

XV

71. Să se arate că mulțimile:

$$A = \left\{x \in Q \mid x = \frac{2n+1}{2n-3},\ n \in \mathbf{N}\right\}$$

$$B = \left\{y \in Q \mid y = \frac{3k+1}{3k-2},\ k \in \mathbf{N}\right\}$$

sînt disjuncte.

72. Să se arate că dacă $a, b, c \in \left(-\frac{1}{4}, +\infty\right)$ astfel încît $a+b+c=1$, atunci:

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leqslant 5.$$

73. Să se afle $m \in \mathbf{N}^*$ astfel încît polinomul:

$$f = (X-1)^m - X^m + 1$$

să fie divizibil prin $g = X^2 - X + 1$.

74. Să se arate că oricare ar fi matricele nesingulare $A, B \in M_n(\mathbf{C})$ este adevărată egalitatea:

$$\det(U + AB) = \det(U + BA),$$

unde U este matricea unitate de ordinul n.

75. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel.

a) Dacă $x \in A$ și $1+1=0$ să se exprime $(x+1)^n$ ca sumă de puteri ale lui x, pentru $n \in \{2, 3, 4, 5\}$.

b) Dacă există $n \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $x^{n+1} = x^n$, $(\forall)\ x \in A$, să se arate că $1+1=0$ și că $x^2 = x$, $(\forall)\ x \in A$.

XVI

76. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < \frac{3}{4}.$$

77. Determinați $a \in \mathbf{R}$ și rezolvați ecuația:

$$x^3 - 6x^2 + ax + a = 0$$

știind că:

$$(x_1 - 1)^3 + (x_2 - 2)^3 + (x_3 - 3)^3 = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

78. Să se arate că, dacă numerele x, y, z, a, b, c verifică egalitățile:

$$x + y + z = a + b + c \qquad (1)$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2 \qquad (2)$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = a^3 + b^3 + c^3 \qquad (3)$$

atunci $x^n + y^n + z^n = a^n + b^n + c^n \quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$.

79. Să se rezolve și să se discute sistemul:

$$(S): \begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + (a+b)z = 1 \\ a^2x + b^2y + (a^2+b^2)z = 1 \end{cases}$$

80. a) Să se dea exemple de matrice $X, Y \in M_n(\mathbf{C})$ pentru care există $a, b \in \mathbf{C}^*$ astfel încît:

$$XY = aX + bY$$

b) Arătați că două astfel de matrice comută.

XVII

81. Fie $a \in \mathbf{R}$, fixat. Determinați numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$, verificînd sistemul:

$$\begin{cases} x_1^2 + ax_1 + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = x_2 \\ x_2^2 + ax_2 + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = x_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1}^2 + ax_{n-1} + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = x_n \\ x_n^2 + ax_n + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = x_1 \end{cases}$$

82. Să se demonstrez că numerele $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ nu pot fi termeni ai aceleiași progresii aritmetice.

83. Să se determine valoarea parametrului real m astfel încît toate rădăcinile ecuației:

$$x^4 + x^3 - 2x^2 + 3mx - m^2 = 0$$

să fie reale și să se rezolve în acest caz ecuația.

84. Să se rezolve și să se discute sistemul:

$$(S): \begin{cases} ax + by + cz = 1 \\ cx + ay + bz = 1 \\ bx + cy + az = 1 \end{cases}$$

unde $a, b, c \in \mathbf{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

85. Să se rezolve în Z_8 sistemul:

$$\begin{cases} \hat{2}x + \hat{5}y = \hat{2} \\ \hat{3}x + \hat{7}y = \hat{6} \end{cases}$$

XVIII

86. Fie $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbf{R}$ astfel încît:

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_5)^2 \geqslant 3(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - a_5^2).$$

Demonstrați că pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$ avem:

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_5 - x - y)^2 \geqslant a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - a_5^2 - x^2 - y^2.$$

87. Fie $f(x) = (ax - a_1)^2 + (ax - a_2)^2 + \ldots + (ax - a_{10})^2$, unde $a \neq 0$ și $a_1, a_2, \ldots, a_{10} \in \mathbf{R}$.

a) Arătați că f_{min} nu depinde de a.

b) Dacă $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{10}^2 = 1$, atunci $a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} \leqslant \sqrt{10}$.

88. Fie P un polinom cu coeficienți pozitivi și n numere strict pozitive $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Să se demonstreze inegalitatea:

$$P^2\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + P^2\left(\frac{x_2}{x_3}\right) + \ldots + P^2\left(\frac{x_n}{x_1}\right) \geqslant nP^2 \quad (1)$$

89. Să se arate că un determinant de ordinul al treilea avînd elemente egale cu $\frac{1}{2}$ pe diagonala principală și pe fiecare linie și pe fiecare coloană suma elementelor este egală cu 1, este un număr strict pozitiv.

90. Să se determine cel mai mare divizor comun al polinoamelor $f, g \in \mathbf{Z}_7[X]$ unde:

$$f = X^4 + \hat{6}X^3 + \hat{5}X^2 + \hat{3}X + \hat{3} \quad \text{și}$$

$$g = \hat{3}X^2 + \hat{1}$$

XIX

91. Să se arate că nu există funcții injective $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încît:

$$f(x^2) - f^2(x) \geqslant \frac{1}{4}, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

92. Să se rezolve ecuația:

$$\log_2(x+1) + \log_3(x+1) + \ldots + \log_n(x+1) + (n-1) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x + \ldots + \left(\frac{1}{n}\right)^x.$$

Scanned with OKEN Scanner

93. Să se determine permutarea $\sigma \in S_n$, cu $n \geq 3$ astfel încît numerele $1 + \sigma(1)$, $2 + \sigma(2)$, ..., $n + \sigma(n)$ să fie în progresie aritmetică.

94. Fie x, y elemente ale unui grup astfel încît $x^2 = y^6 = e$ și $xy = y^4x$. Să se arate că $y^3 = e$ și că x și y comută.

95. Fie $f = \hat{2}X^3 + \hat{5}X^2 + \hat{3}X + \hat{1} \in \mathbf{Z}_6[X]$.
Să se determine $g \in \mathbf{Z}_6[X]$ cu grad $g = 3$, astfel încît funcțiile polinomiale atașate $\tilde{f}$, $\tilde{g} : \mathbf{Z}_6 \to \mathbf{Z}_6$ să fie egale.

XX

96. Fie $f : [a, b] \to [a, b]$ cu proprietatea $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$, $(\forall)$ x, $y \in [a, b]$. Să se demonstreze egalitatea:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|, \ (\forall) \ x, y \in [a, b].$$

97. Să se determine polinomul P de gradul al treilea astfel încît $P(1) + P(2) + \ldots + P(n) = n^4$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$.

98. Fie a, b, $c \in \mathbf{R}$ astfel încît $ab + ac + bc > 0$. Arătați că:

$$(a + b + c)(ab + ac + bc) \neq abc.$$

99. Fie polinomul $P = X^{n_k} + X^{n_{k-1}} + \ldots + X^{n_1} + 1$, unde $n_1, \ldots, n_k \in \mathbf{N}$, $n_k > n_{k-1} > \ldots > n_1$ și $n_k \geq 3$.
Să se afle restul împărțirii polinomului P prin $x(x - 1)^2$.

100. Fie V un spațiu vectorial peste corpul $\mathbf{R}$ și $v_1, v_2, v_3 \in V$ vectori liniar independenți. Să se arate că vectorii $v_1 - v_2 + v_3$, $v_1 + v_2 - v_3$, $-v_1 + v_2 + v_3$ sînt liniar independenți.

Scanned with OKEN Scanner

SOLUȚII

I

1. Presupunem că ambele ecuații au rădăcini aparținînd mulțimii $\mathbb{C} - \mathbb{R}$. Atunci:

$$\Delta_1 = p_1^2 - 4q_1 < 0,\ \Delta_2 = p_2^2 - 4q < 0.$$

Adunînd avem:

$$p_1^2 + p_2^2 - 4(q_1 + q_2) < 0.$$

Înlocuim din ipoteză $2(q_1 + q_2) = p_1 p_2$ și obținem:

$p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2 < 0$ echivalent cu $(p_1 - p_2)^2 < 0$, fals.

Rezultă că presupunerea făcută este falsă.

Deci, cel puțin una din ecuațiile date are rădăcini reale.

2. Observăm că $x = 0$ este soluție a ecuației date. De asemenea, observăm că înlocuind în ecuație x cu $-x$, ecuația nu se schimbă. De aici rezultă că dacă ecuația nu are soluție strict pozitivă, ea nu va avea nici soluție strict negativă. Presupunem că ecuația admite o soluție $x \geqslant 1$, Atunci:

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+1+1}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > \sqrt{x^2+1} > \sqrt[3]{x^2+1} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[3]{x+1} \geqslant \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{1-x}.$$

contradicție cu $\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x} = \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$

Scanned with OKEN Scanner

Deci ecuația nu are soluție $x \geqslant 1$.
Presupunem că ecuația are o soluție $x \in (0, 1)$. Atunci

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \geqslant 2 \qquad (1)$$

Demonstrăm că:

$$\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x} < 2 \qquad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt[3]{1-x} < 2 - \sqrt[3]{1+x} \Leftrightarrow 1 - x < 8 - 12\sqrt[3]{1+x} + 6\sqrt[3]{(1+x)^2} -$$

$$- 1 - x \Leftrightarrow 6\sqrt[3]{(1+x)^2} - 12\sqrt[3]{1+x} + 6 > 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{1+x} - 1)^2 > 0$, inegalitate adevărată.

Deci inegalitatea (2) este adevărată.
(1) și (2) sînt în contradicție cu presupunerea că ecuația admite soluție $x \in (0, 1)$.

Deci, unica soluție a cuației este $x = 0$.

3. Ecuația dată se scrie astfel:

$$3^x \cdot 3 + 100 = \frac{7^x}{7} \text{ sau } 3^x \cdot 21 + 700 = 7^x.$$

Împărțim cu 7^x:

$$\left(\frac{3}{7}\right)^x \cdot 21 + \left(\frac{1}{7}\right)^x \cdot 700 = 1.$$

Observăm că $x = 4$ este soluție a ecuației date.
Presupunem că ecuația admite cel puțin două soluții $x_1 < x_2$. Atunci:

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{x_1} > \left(\frac{3}{7}\right)^{x_2} \text{ și } \left(\frac{1}{7}\right)^{x_1} > \left(\frac{1}{7}\right)^{x_2}$$

Înmulțim prima inegalitate cu 21 și a doua cu 700 și adunînd obținem

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{x_1} \cdot 21 + \left(\frac{1}{7}\right)^{x_1} \cdot 700 > \left(\frac{3}{7}\right)^{x_2} \cdot 21 + \left(\frac{1}{7}\right)^{x_2} \cdot 700$$

Avînd în vedere că x_1 și x_2 sînt soluții ale ecuației, ultima inegalitate devine $1 > 1$, fals.
Rezultă că presupunerea făcută este falsă.

Deci $x = 4$ este unica soluție a ecuației.

4. Fie $x, y \in R - \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Avem

$$A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-y & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & 1-y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1-(x+y-2xy) & 0 & x+y-2xy \\ 0 & 0 & 0 \\ x+y-2xy & 0 & 1-(x+y-2xy) \end{pmatrix} = A(x+y-2xy).$$

Scanned with OKEN Scanner

Observăm că $x + y - 2xy \in \mathbf{R}$.

Presupunem că $(\exists)\ x, y \in \mathbf{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ astfel încît $x + y - 2xy = \frac{1}{2}$. Atunci $(2x - 1)(2y - 1) = 0$, de unde $x = \frac{1}{2}$ sau $y = \frac{1}{2}$, contradicție. Rezultă că presupunerea este falsă, deci

$$x + y - 2xy \in \mathbf{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

Înmulțirea este asociativă, deoarece $(\forall)\ x, y, z \in \mathbf{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ avem:

$$(A(x) \cdot A(y)) \cdot A(z) = A(x) \cdot (A(y) \cdot A(z)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A(x + y - 2xy) \cdot A(z) = A(x) \cdot A(y + z - 2yz) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A(x + y + z - 2xy - 2xz - 2yz + 4xyz) = A(x + y + z - 2yz - 2xy - 2xz + 4xyz).$$

Înmulțirea este comutativă, deoarece $(\forall)\ x, y \in \mathbf{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ avem:

$$A(x) \cdot A(y) = A(y) \cdot A(x) \Leftrightarrow A(x + y - 2xy) = A(y + x - 2yx).$$

Determinăm $e \in \mathbf{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ astfel încît

$$A(x) \cdot A(e) = A(x),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

Avem $A(x + e - 2xe) = A(x)$, de unde $x + e - 2xe = x$, adică

$$e(1 - 2x) = 0.$$

Egalitatea este adevărată pentru orice $x \in \mathbf{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$, dacă și numai dacă $e = 0$.

Deci

$$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ este element neutru.

Fie $A(x')$ simetrica matricei $A(x)$.

$$A(x) \cdot A(x') = A(0) \Leftrightarrow A(x + x' - 2xx') = A(0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + x' - 2xx' = 0 \Leftrightarrow x' = \frac{x}{2x - 1}.$$

Observăm că: $\frac{x}{2x - 1} \in \mathbf{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Scanned with OKEN Scanner

Deci $(G, \cdot)$ este grup abelian.

Observație. Verificarea axiomelor grupului se putea face și prin calcul.

b) $A^2(x) = A(2x - x^2) = \begin{pmatrix} 1-(2x-x^2) & 0 & 2x-x^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2x-x^2 & 0 & 1-(2x-x^2) \end{pmatrix}$.

Notăm:

$$A^n(x) = \begin{pmatrix} 1-a_n & 0 & a_n \\ 0 & 0 & 0 \\ a_n & 0 & 1-a_n \end{pmatrix} = A(a_n).$$

Atunci $A^{n+1}(x) = A(x) \cdot A^n(x) = A(x) \cdot A(a_n) = A(x + a_n - 2xa_n) =$

$$= A(a_{n+1}).$$

Rezultă: $a_{n+1} = x + a_n - 2xa_n$ sau

$a_{n+1} = (1-2x)a_n + x$ și $a_1 = x$.

Atunci: $a_2 = (1-2x)a_1 + x \quad /\cdot(1-2x)^{n-2}$

$a_3 = (1-2x)a_2 + x \quad /\cdot(1-2x)^{n-3}$

. . . . . .

$a_{n-1} = (1-2x)a_{n-2} + x \quad /\cdot(1-2x)$

$a_n = (1-2x)a_{n-1} + x$

Adunînd egalitățile obținem:

$$a_n = (1-2x)^{n-1}a_1 + x[1 + (1-2x) + \ldots + (1-2x)^{n-2}].$$

Cum $a_1 = x$ avem:

$$a_n = x[1 + (1-2x) + \ldots + (1-2x)^{n-1}] = x \cdot \frac{1-(1-2x)^n}{1-(1-2x)} = \frac{1-(1-2x)^n}{2}.$$

Deci:

$$A^n(x) = \begin{pmatrix} 1-\frac{1-(1-2x)^n}{2} & 0 & \frac{1-(1-2x)^n}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1-(1-2x)^n}{2} & 0 & 1-\frac{1-(1-2x)^n}{2} \end{pmatrix}$$

5. Presupunem că există o permutare $\sigma \in S_n$ astfel încît pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ să avem:

$$x_i(a - x_{\sigma(i)}) > \frac{a^2}{4}.$$

Atunci $\prod_{i=1}^{n} x_i(a - x_{\sigma(i)}) > \left(\frac{a^2}{4}\right)^n$

care echivalează cu:

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} (a - x_i)\right) > \left(\frac{a^2}{4}\right)^n \qquad (1)$$

Scanned with OKEN Scanner

deoarece

$$\prod_{i=1}^{n}(a - x_{\sigma(i)}) = \prod_{i=1}^{n}(a - x_i).$$

Aplicăm inegalitatea dintre media geometrică și media aritmetică numerelor pozitive x_i și $a - x_i$.
Avem

$$\sqrt{x_i(a - x_i)} \leqslant \frac{x_i + (a - x_i)}{2},$$

de unde

$$x_i(a - x_i) \leqslant \frac{a^2}{4} \text{ pentru } i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

De aici avem

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(\prod_{i=1}^{n}(a - x_i)\right) \leqslant \left(\frac{a^2}{4}\right)^n \qquad (2)$$

Inegalitățile (1) și (2) sînt contradictorii, deci presupunerea făcută este falsă.

II

6. a) În (2) înlocuind $y = 0$ obținem :

$$f(x) \leqslant f(x) + f(0), \text{ de unde } f(0) \geqslant 0.$$

În (2) facem înlocuirea $y = -x$.
Obținem $f(0) \leqslant f(x) + f(-x)$ de unde $2f(x) \geqslant f(0)$.
Dar $f(0) \geqslant 0$, deci $f(x) \geqslant 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

b) $f(x) = f(x - y + y) \leqslant f(x - y) + f(y)$.

conform (2). De aici avem :

$$f(x) - f(y) \leqslant f(x - y) \qquad (*)$$

$$f(y) = f(y - x + x) \leqslant f(y - x) + f(x).$$

Ținînd seama că $f(y - x) = f(x - y)$, avem

$$-f(x - y) \leqslant f(x) - f(y) \qquad (**)$$

Din (*) și (**) avem :

$$-f(x - y) \leqslant f(x) - f(y) \leqslant f(x - y),$$

echivalentă cu :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant f(x - y).$$

Scanned with OKEN Scanner

7. Condițiile de existență a radicalilor sînt :

$$\begin{cases} 3x + y \geqslant 0 & (1) \\ x - y \geqslant 0 & (2) \end{cases}$$

Scăzînd ecuațiile obținem :

$$\sqrt{3x+y} - 3x = -11, \text{ de unde}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3x+y} = 3x - 11 \\ \sqrt{x-y} = 17 - 3x \end{cases} \quad (*)$$

Se impun condițiile $\begin{cases} 3x - 11 \geqslant 0 & (3) \\ 17 - 3x \geqslant 0 & (4) \end{cases}$

de unde $x \in \left[\frac{11}{3}, \frac{17}{3}\right]$

Ridicînd la pătrat ecuațiile (*) obținem

$$\begin{cases} 3x + y = 9x^2 - 66x + 121 \\ x - y = 289 - 102x + 9x^2 \end{cases}$$

Adunînd ecuațiile obținem :

$$4x = 18x^2 - 168x + 410 \text{ echivalentă cu}$$

$$9x^2 - 86x + 205 = 0$$

Soluțiile ecuației sînt :

$$x_1 = 5, \; x_2 = \frac{41}{9}, \text{ de unde obținem :}$$

I $x = 5$, $y = 1$, soluție a sistemului dat ;

II) $x = \frac{11}{7}$, $y = -\frac{59}{9}$ soluție a sistemului dat.

8. Observăm că înlocuind în sistem x cu $-x$, sistemul nu se schimbă. De aici rezultă că, dacă (x, y) este soluție a sistemului, atunci și $(-x, y)$ este soluție.

Dar sistemul trebuind să admită soluție unică, avem

$$x = -x, \text{ adică } x = 0.$$

Înlocuind în sistem, obținem :

$$\begin{cases} 1 = y + a \\ y^2 = 1 \end{cases}$$

de unde $y = \pm 1$

Pentru $y = 1$ avem $a = 0$.

Pentru $y = -1$ avem $a = 2$.

Scanned with OKEN Scanner

Concluzii:

Dacă $a = 0$, atunci $x = 0$, $y = 1$ este soluțle.
Dacă $a = 2$, atunci $x = 0$, $y = -1$ este soluție.

9. Permutarea:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

este permutare pară, deci ecuația dată poate admite soluții.

Notăm: $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ x(1) & x(2) & x(3) & x(4, & x(5) \end{pmatrix}$.

Analizăm următoarele situații:

I. $X(1) = 1$

$X^2(1) = X(X(1)) = X(1) = 1$

$\varphi(1) = 5$

Deci $X^2(1) \neq \varphi(1)$.

II. $X(1) = 2$

$X^2(1) = X(X(1)) = X(2)$

$\varphi(1) = 5$.

Deci $X(2) = 5$

$X^2(2) = X(X(2)) = X(5)$

$\varphi(2) = 3$

Deci $X(5) = 3$

$X^2(5) = X(X(5)) = X(3)$

$\varphi(5) = 2$.

Deci $X(3) = 2$. Imposibil deoarece și $X(1) = 2$ și X trebuie să fie funcție bijectivă.

III. $X(1) = 3$

$X^2(1) = X(X(1)) = X(3)$

$\varphi(1) = 5$

Deci $X(3) = 5$

$X^2(3) = X(X(3)) = X(5)$

$\varphi(3) = 4$

Deci $X(5) = 4$.

$X^2(5) = X(X(5)) = X(4)$

$\varphi(5) = 2$

Scanned with OKEN Scanner

Deci $X(4) = 2$
Atunci $X(2) = 1$
și obținem permutarea

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

care verifică ecuația dată.

IV. $X(1) = 4$

$X^2(1) = X(X(1)) = X(4)$

$\varphi(1) = 5$

Deci $X(4) = 5$

$X^2(4) = X(X(4)) = X(5)$

$\varphi(4) = 1$

Deci $X(5) = 1$

$X^2(5) = X(X(5)) = X(1)$

$\varphi(5) = 2$

Deci $X(1) = 2$, contradicție cu $X(1) = 4$

V. $X(1) = 5$

$X^2(1) = X(X(1)) = X(5)$

$\varphi(1) = 5$

Deci $X(5) = 5$, contradicție cu $X(1) = 5$.

$$\text{Deci } X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

este singura soluție a ecuației.

10. Presupunem că există $S \subset G$, parte stabilă proprie astfel încît $G - H \subset S$.
Demonstrăm că $(\forall)\ x \in G - H$ avem $x^{-1} \in G - H$.
Presupunem că $(\exists)\ x \in G - H$ astfel încît $x^{-1} \in H$.
Atunci $(x^{-1})^{-1} \in H$,adică $x \in H$, contradicție.
Demonstrăm că $(\forall)\ h \in H$, $(\forall)\ x \in G - H$ avem $xh \in G - H$.
Presupunem că $(\exists)\ h \in H$, $(\exists)\ x \in G - H$ astfel încît $xh \in H$. Cum $h \in H$ și H este grup, rezultă $(xh)h^{-1} \in H$, adică $x \in H$, contradicție.
Fie $h \in H$, $h \notin S$ și $x \in G - H$.
Atunci $xh \in G - H \subset S$ și

$$x^{-1} \in G - H \subset S$$

și cum S este parte stabilă, avem

$x^{-1}(xh) \in S$, adică $h \in S$, contradicție.

Scanned with OKEN Scanner

11. $y = \frac{2x^2 + 5x + 9}{2x + 3}$ implică $2xy + 3y = 2x^2 + 5x + 9$, $2x^2 + (5 - 2y)x + 9 - 3y = 0$, care este o ecuație în necunoscuta x cu $y \in \mathbf{Z}$ parametru. Trebuie ca ecuația să aibă rădăcini raționale pozitive.

$$\Delta = (5 - 2y)^2 - 8(9 - 3y) = 25 - 20y + 4y^2 - 72 + 24y =$$
$$= 4y^2 + 4y - 47 \in \mathbf{Z}.$$

Trebuie să avem $\Delta \geqslant 0$ și pătrat perfect. Observăm că Δ este număr impar. Atunci Δ trebuie să fie pătrat de număr impar.

$$4y^2 + 4y - 47 = (2p + 1)^2, \; p \in \mathbf{N}$$
$$4y^2 + 4y - 47 = 4p^2 + 4p + 1$$
$$y^2 + y - 12 = p^2 + p$$
$$(y - p)(y + p + 1) = 12 \quad \text{cu } y \in \mathbf{Z}, \; p \in \mathbf{N}.$$

Observăm că $y + p + 1 > y - p$ (1)

$(y - p) + (y + p + 1) = 2y + 1$, număr impar (2)

Avem următoarele situații:

I. $\begin{cases} y + p + 1 = 12 \\ y - p = 1 \end{cases}$

de unde $y = 6$, $p = 5$

Ecuația este $2x^2 - 7x - 9 = 0$ având soluțiile $x = \frac{9}{2}$ și $x = -1$. Ultima nu convine.

II. $\begin{cases} y + p + 1 = 4 \\ y - p = 3 \end{cases}$

de unde $y = 3$, $p = 0$.

Ecuația este $2x^2 - x = 0$ având rădăcinile $x = \frac{1}{2}$ și $x = 0$. Ultima nu convine.

Rezultă $M = \{6, 3\}$.

12. Soluția 1) $x^2 + y^2 - 4x - 4y + m > 0$, $(\forall)$ $x, y \in \mathbf{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + (y^2 - 4y + m) > 0$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$, unde $y \in \mathbf{R}$ $Q \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Delta_x < 0$, $(\forall)$ $y \in \mathbf{R} \Leftrightarrow 16 - 4(y^2 - 4y + m) < 0$,

$(\forall)$ $y \in \mathbf{R} \Leftrightarrow -y^2 + 4y + 4 - m < 0$, $(\forall)$ $y \in \mathbf{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Delta_y < 0 \Leftrightarrow 16 + 4(4 - m) < 0 \Leftrightarrow m > 8 \Leftrightarrow m \in (8, +\infty)$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluția II) $x^2 + y^2 - 4x - 4y + m > 0$, $(\forall)$ $x, y \in \mathbf{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 + (m-8) > 0$, $(\forall)$ $x, y \in \mathbf{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m - 8 > 0 \Rightarrow m \in (8, +\infty)$, deoarece dacă avem $m \leqslant 8$, atunci pentru $x = 2$, $y = 2$ avem $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 8 \leqslant 0$, fals.

13. Observăm că ecuația nu poate avea soluție mai mică sau egală cu zero. Fie x_0 soluție a ecuației date.
Aplicînd inegalitatea mediilor avem

$$x_0 \cdot 2^{\frac{1}{x_0}} + \frac{1}{x_0} \cdot 2^{x} \geqslant 2\sqrt{x_0 \cdot 2^{\frac{1}{x_0}} \cdot \frac{1}{x_0} \cdot 2^{x_0}},$$

care echivalează cu

$$x_0 \cdot 2^{\frac{1}{x_0}} + \frac{1}{x_0} \cdot 2^{x_0} \geqslant 2\sqrt{2^{\frac{1}{x_0} + x_0}} \qquad (1)$$

Avem, de asemenea, $\frac{1}{x_0} + x_0 \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{x_0} \cdot x_0}$, adică $\frac{1}{x_0} + x_0 \geqslant 2$.

De aici, $2\sqrt{2^{\frac{1}{x_0} + x_0}} \geqslant 2\sqrt{2^2}$,

adică $2\sqrt{2^{\frac{1}{x_0} + x_0}} \geqslant 4$ (2)

Din (1) și (2) obținem $x_0 \cdot 2^{\frac{1}{x_0}} + \frac{1}{x_0} \cdot 2^{x_0} \geqslant 4$. (*)

Dar x_0 este soluție a ecuației.

Atunci $x_0 \cdot 2^{\frac{1}{x_0}} + \frac{1}{x_0} \cdot 2^{x_0} = 4$.

În inegalitatea (*) avem egalitate dacă și numai dacă în inegalitatea mediilor numerele sînt egale. Obținem sistemul:

$$\begin{cases} x_0 \cdot 2^{\frac{1}{x_0}} = \frac{1}{x_0} \cdot 2^{x_0} \\ \frac{1}{x_0} = x_0 \end{cases}$$

avînd unica soluție $x_0 = 1$.
Deci $x = 1$ este unica soluție a ecuației date.

14. Fie $n = 2$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Trebuie să avem $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & b^2 \\ c^2 & d^2 \end{pmatrix}$.

Obținem sistemul:

$$\begin{cases} a^2 + bc = a^2 \\ ab + bd = b^2 \\ ac + cd = c^2 \\ bc + d^2 = d^2 \end{cases}$$

Echivalent cu

$$\begin{cases} bc = 0 \\ b(a + d - b) = 0 \\ c(a + d - c) = 0 \end{cases}$$

Analizăm următoarele situații:

I) $b = 0,\ c = 0.$

Obținem $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & d^2 \end{pmatrix}$.

Presupunem $A^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & d^k \end{pmatrix}$. Atunci

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & d^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{k+1} & 0 \\ 0 & d^{k+1} \end{pmatrix}.$$

II) $b = 0,\ c \neq 0,\ a + d - c = 0.$

Atunci $d = c - a$ și

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & c - a \end{pmatrix}.$$

Calculînd, obținem: $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ c^2 & (c-a)^2 \end{pmatrix}$

Calculăm $A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ c^2 & (c-a)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & c-a \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ ac^2 + c(c-a)^2 & (c-a)^3 \end{pmatrix}.$$

Trebuie să avem:

$$A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ c^3 & (c-a)^3 \end{pmatrix}$$

Atunci $ac^2 + c(c-a)^2 = c^3 \Leftrightarrow ac^2 + c^3 - 2ac^2 + a^2c = c^3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a^2c - ac^2 = 0 \Leftrightarrow ac(a - c) = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum $c \neq 0$, atunci $a = 0$ sau $a = c$.

$II_1)$ $a = 0,\ b = 0,\ c = d.$

Atunci: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & c \end{pmatrix}$.

Prin inducție matematică se arată că $A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c^n & c^n \end{pmatrix}$.

$II_2)$ $a = c \neq 0,\ b = 0,\ d = 0.$

Atunci: $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$.

Prin inducție matematică se arată că: $A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ a^n & 0 \end{pmatrix}$.

III. $b \neq 0,\ c = 0,\ a + d - b = 0.$
Se studiază analog cu II).

15. Fie $x \in H$, arbitrar. Atunci $(\exists)\ x_0 \in G$ astfel încît $x = x_0^2$.
Avem $x^{-1} = (x_0^2)^{-1} = (x_0^{-1})^2 \in H$.
Am arătat că $(\forall)\ x \in H$ avem $x^{-1} \in H$ (1)
Fie $x, y \in H$, arbitrare. Atunci $(\exists)\ x_0, y_0 \in G$ astfel încît

$$x = x_0^2,\ y = y_0^2.$$

Avem:

$$xy = x_0^2 y_0^2 = x_0 x_0 y_0 y_0 = x_0 y_0 x_0 y_0 = (x_0 y_0)^2 \in H.$$

Am folosit comutativitatea grupului G.
Am arătat că $(\forall)\ x, y \in H$ avem $x \cdot y \in H$ (2)
Din (1), (2) rezultă că $(H, \cdot)$ este subgrup al grupului $(G, \cdot)$.
Reciproca nu este adevărată.
Într-adevăr, fie S_3 grupul neabeliam al permutărilor de trei elemente și

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Se verifică ușor că H este subgrup al grupului S_3, deși S_3 nu este abelian.

IV

16. a) Avem $y^2x = y(yx) = y(xy^3) = (yx)y^3 = (xy^3)y^3 = xy^6 = (xy^2)y^4 =$
$= (xy^2)e = xy^2.$

b) $y^3x = y(y^2x) = y(xy^2) = (yx)y^2 = (xy^3)y^2 = xy^5 = (xy)y^4 = (xy)e = xy.$

c) Calculăm $yxyx^2 = (xy^3)(yx^2) = xy^4x^2 = xex^2 = x^3 = e$.
Deci $yxyx^2 = e$. Înmulțind la stînga cu y^{-1} obținem $xyx^2 = y^{-1}$.
Înmulțind la stînga cu x^{-1} obținem:

$$yx^2 = x^{-1}y^{-1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

În sfîrșit, înmulțind la stînga cu y^{-1} obținem :

$$x^2 = y^{-1}x^{-1}y^{-1}.$$

17. a) $A + B = AB$ implică $AB - A - B = 0$.

Adunînd matricea unitate I_n obținem :

$AB - A - B + I_n = I_n$, de unde avem succesiv :

$A(B - I_n) - (B - I_n) = I_n$;

$(A - I_n)(B - I_n) = I_n$; (*) .

$\det (A - I_n)(B - I_n) = \det I_n$;

$\det (A - I_n) \cdot \det (B - I_n) = 1$.

De aici avem $\det (A - I_n) \neq 0$, deci matrice $A - I_n$ este inversabilă. Înmulțind egalitatea (*) la stînga cu $(A - I_n)^{-1}$ obținem

$$B - I_n = (A - I_n)^{-1}.$$

Înmulțind ultima egalitate la dreapta cu $A - I_n$ obținem :

$(B - I_n)(A - I_n) = I_n$, de unde obținem succesiv :

$$BA - B - A + I_n = I_n ;$$

$$BA = A + B.$$

Cum $A + B = AB$, obținem $AB = BA$, deci matricele A și B comută. Demonstrăm egalitatea $A^m B^n = B^n A^m$ cu $m, n \in \mathbf{N}^*$ prin inducție matematică după n.

Pentru $n = 1$, demonstrăm egalitatea $A^m B = BA^m$ prin inducție matematică după m.

Pentru $m = 1$ avem $AB = BA$, egalitate adevărată.

Presupunem $A^k B = BA^k$.

Atunci $A^{k+1}B = (A^k A)B = A^k(AB) = A^k(BA) = (A^k B)A = (BA^k)A = B(A^k A) = BA^{k+1}$.

Deci $A^m B = BA^m$ este adevărată pentru orice $m \in \mathbf{N}^*$.

Presupunem adevărată egalitatea $A^m B^h = B^h A^m$.

Atunci $A^m B^{h+1} = A^m(B^h B) = (A^m B^h)B = (B^h A^m)B = B^h(A^m B) = B^h(BA^m) = (B^h B)A^m = B^{h+1}A^m$.

Deci $A^m B^n = B^n A^m$, $(\forall)\ m, n \in \mathbf{N}^*$.

b) Conform punctului a) avem implicațiile :

$$A + B = AB \Rightarrow AB = BA$$

$$B + C = BC \Rightarrow BC = CB$$

$$C + A = CA \Rightarrow CA = AC$$

Scanned with OKEN Scanner

Adunînd egalitățile din enunț obținem:

$$2(A+B+C)=AB+BC+CA, \text{ de unde}$$

$$A+B+C=\frac{1}{2}(AB+BC+CA) \quad (1)$$

$$AB+BC=AB+CB=(A+C)B=(CA)B=(AC)B=A(CB)=$$
$$=A(BC)=ABC.$$

Analog $AB+CA=ABC$ și $BC+CA=ABC$.
Adunînd cele trei egalități obținem:

$$2(AB+BC+CA)=3ABC, \text{ de unde}$$

$$AB+BC+CA=\frac{3}{2}ABC \quad (2)$$

Din (1) și (2) obținem:

$$A+B+C=\frac{3}{4}ABC.$$

18. Se impune condiția de existență a logaritmului

$$7-2\sqrt{x}-x>0.$$

Notăm $\sqrt{x}=t$.
Inecuația devine $t^2+2t-7<0$.
Rădăcinile ecuației atașate inecuației sînt

$$t_1=-1-2\sqrt{2},\ t_2=-1+2\sqrt{2}.$$

Mulțimea soluțiilor inecuației în t este $(-1-2\sqrt{2}, -1+2\sqrt{2})$.
Dar $t\geqslant 0$, de unde $t\in[0, -1+2\sqrt{2})$, adică $\sqrt{x}\in[0, -1+2\sqrt{2})$, de unde $x\in[0, 9-4\sqrt{2})$.
Dar $x\in\mathbf{N}$, deci $x\in\{0, 1, 2, 3\}$.
Pentru $x=0$ avem $f(0)=\log_{\sqrt{3}-1}7\notin\mathbf{N}$.
Pentru $x=1$ avem $f(1)=\log_{\sqrt{3}-1}4\notin\mathbf{N}$.
Pentru $x=2$ avem $f(2)=\log_{\sqrt{3}-1}(5-2\sqrt{2})\notin\mathbf{N}$.
Pentru $x=3$ avem $f(3)=\log_{\sqrt{3}-1}(4-2\sqrt{3})=2$.
Rezultă că punctul $A(3;2)\in G_f$.

19. Presupunem că:

$$\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)\left(\frac{d}{c}-\frac{b}{a}\right)\in\mathbf{N}^*.$$

Notăm $n=\frac{ad-bc}{bd}\cdot\frac{ad-bc}{ac}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

Notăm $ad=x$ și $bc=y$.
Atunci $n=\frac{(x-y)^2}{xy}$ care se transformă succesiv:

$$x^2-2xy+y^2=nxy\,|:y^2$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2-(2+n)\frac{x}{y}+1=0,$$

Scanned with OKEN Scanner

ecuație în $\frac{x}{y}$ având rădăcini raționale. Pentru aceasta trebuie ca Δ să fie pătratul unui număr natural.

$$\Delta = (2 + n)^2 - 4.$$

Avem $(2 + n)^2 - 4 = p^2$ cu $p \in \mathbf{N}$.
de unde $(2 + n)^2 - p^2 = 4$;

$$(2 + n + p)(2 + n - p) = 4;$$

$$2 + n + p \in \mathbf{N},\ 2 + n - p \in \mathbf{N}^*.$$

Observăm că $2 + n + p \geqslant 2 + n - p$.
Avem sistemele:

I) $$\begin{cases} 2 + n + p = 4 \\ 2 + n - p = 1 \end{cases}$$

care duce la $n = \frac{1}{2} \notin \mathbf{N}^*$.

II) $$\begin{cases} 2 + n + p = 2 \\ 2 + n - p = 2 \end{cases}$$

care duce la $p = 0$, $n = 0 \notin \mathbf{N}^*$.
Rezultă că presupunerea făcută este falsă, Deci $n \notin \mathbf{N}^*$.

20. I) $x \in [1, +\infty)$.
Ecuația devine succesiv

$$|x - x + 1| = (m - 1)x + 1;$$
$$1 = (m - 1)x + 1;$$
$$(m - 1)x = 0.$$

1) Dacă $m = 1$, atunci orice $x \in [1, +\infty)$ este soluție,
Dacă $m \neq 1$ atunci $x = 0$ verifică ecuația $(m - 1)x = 0$, dar $0 \notin [1, +\infty)$.

II) $x \in (-\infty, 1)$.
Ecuația devine succesiv:

$$|x + x - 1| = (m - 1)x + 1;$$
$$|2x - 1| = (m - 1)x + 1.$$

1) $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.
Ecuația devine $2x - 1 = (m - 1)x + 1$;

$$(m - 3)x = -2.$$

a) Dacă $m = 3$, atunci $Ox = -2$, fals.

b) Dacă $m \neq 3$, atunci $x = \frac{2}{3 - m}$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru ca $\frac{2}{3-m}$ să fie soluție, trebuie îndeplinite condițiile:

$$\begin{cases} \frac{2}{3-m} > \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3-m} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-1, 1).$$

2) $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$.

Ecuația devine $-2x + 1 = (m-1)x + 1$;

$$(m+1)x = 0.$$

a) Dacă $m = -1$, atunci orice

$$x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \text{ este soluție.}$$

b) Dacă $m \neq -1$, atunci $x = 0$ este soluție.

Concluzii

1) Dacă $m \in (-1, 1)$ avem $x = \frac{2}{3-m}$, $x = 0$ soluții.
2) Dacă $m \in (-\infty, -1)$ avem $x = 0$ soluție.
3) Dacă $m \in (-1, +\infty)$ avem $x = 0$ soluție.
4) Dacă $m = -1$ avem $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ soluție.
5) Dacă $m = 1$ avem $x \in [1, +\infty)$ soluție.

V

21. Prelucrăm ecuația:

$$2\sqrt{x_1 - 1} + 2 \cdot 2\sqrt{x_2 - 2^2} + \ldots + 2n\sqrt{x_n - n^2} = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

de unde avem:

$$(x_1 - 1 - 2\sqrt{x_1 - 1} + 1) + (x_2 - 2^2 - 2\sqrt{x_2 - 2^2} + 4) + \ldots + (x_n - n^2 - 2n\sqrt{x_n - n^2} + n^2) = 0$$

care se restrînge astfel:

$$(\sqrt{x_1 - 1} - 1)^2 + (\sqrt{x_2 - 2^2} - 2)^2 + \ldots + (\sqrt{x_n - n^2} - n)^2 = 0.$$

O sumă de pătrate de numere reale este mai mare sau egală cu zero. Pentru a avea egalitate cu zero trebuie ca toate pătratele să fie zero.

Obținem sistemul:

$$\begin{cases} \sqrt{x_1 - 1} - 1 = 0 \\ \sqrt{x_2 - 2^2} - 2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sqrt{x_n - n^2} - n = 0 \end{cases}$$

de unde $x_1 = 2$, $x_2 = 8$, $\ldots$, $x_n = 2n^2$.

Înlocuind în ecuația dată constatăm că ecuația este verificată.

Scanned with OKEN Scanner

22. $x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz+x+y+z+\frac{3}{8}\geqslant 0,\ (\forall)\ x,y,z\in\mathbf{R}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+(y+z+1)x+\left(y^2+z^2+yz+y+z+\frac{3}{8}\right)\geqslant 0,\ (\forall)\ x\in\mathbf{R},$

unde $y,\ z\in\mathbf{R}\Leftrightarrow \Delta_x\leqslant 0,\ (\forall)\ y,\ z\in\mathbf{R}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y+z+1)^2-4\left(y^2+z^2+yz+y+z+\frac{3}{8}\right)\leqslant 0,\ (\forall)\ y,\ z\in\mathbf{R}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2+z^2+1+2yz+2y+2z-4y^2-4z^2-4yz-4y-4z-\frac{3}{2}\leqslant 0,$

$(\forall)\ y,\ z\in\mathbf{R}\Leftrightarrow -3y^2-3z^2-2yz-2y-2z-\frac{1}{2}\leqslant 0,\ (\forall)\ y,z\in\mathbf{R}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3y^2-2(z+1)y-\left(3z^2+2z+\frac{1}{2}\right)\leqslant 0,\ (\forall)\ y\in\mathbf{R},$ unde $z\in\mathbf{R}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Delta_y\leqslant 0,\ (\forall)\ z\in\mathbf{R}\Leftrightarrow (z+1)^2+3\left(-3z^2-2z-\frac{1}{2}\right)\leqslant 0,\ (\forall)\ z\in\mathbf{R}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^2+2z+1-9z^2-6z-\frac{3}{2}\leqslant 0,\ (\forall)\ z\in\mathbf{R}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -8z^2-4z-\frac{1}{2}\leqslant 0,\ (\forall)\ z\in\mathbf{R}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16z^2+8z+1\geqslant 0,\ (\forall)\ z\in\mathbf{R}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (4z+1)^2\geqslant 0,\ (\forall)\ z\in\mathbf{R},$ adevărat.

23. Pentru $b=0$ sistemul devine:

$$\begin{cases}(x^2+1)^a=1\\ a+x^2y=1.\end{cases}$$

Prima egalitate este verificată pentru $a=0$ sau pentru $a=1$ cu $x=0$.
Verificăm $a=0$ și $a=1$ pentru orice $b\in\mathbf{R}$.
1) Pentru $a=0$ sistemul devine

$$\begin{cases}(b^2+1)^y=1\\ bxy+x^2y=1.\end{cases}$$

Observăm că prima ecuație este verificată de $y=0$ pentru orice $b\in\mathbf{R}$.
Dar $y=0$ nu verifică ecuația a II-a.
2) Pentru $a=1$ sistemul devine

$$\begin{cases}x^2+1+(b^2+1)^y=2\\ bxy+x^2y=0.\end{cases}$$

Observăm că $x=0,\ y=0$ este soluție a sistemului pentru orice $b\in\mathbf{R}$.
Deci $a=1$ este valoarea căutată.

24. Fie:

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbf{R}).$$

$$A\cdot A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+b^2 & ac+bd\\ ac+bd & c^2+d^2\end{pmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

Notăm cu S suma elementelor matricei $A \cdot {}^tA$. Atunci

$$S = (a^2 + b^2) + 2(ac + bd) + (c^2 + d^2) = (a + c)^2 + (b + d)^2,$$

Dacă $S = 0$, atunci $a + c = 0$ și $b + d = 0$.

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a + c & b + d \\ c & d \end{vmatrix} = 0.$$

25. a) Verificăm axiomele grupului.

1) Fie $x, y \in A$. Atunci $x * y = x^{\alpha \log_a y} > 0$ și $x^{\alpha \log_a y} \neq 1$, deoarece, dacă $x^{\alpha \log_a y} = 1$ avem $x = 1$ (imposibil) sau $\alpha \log_a y = 0$ adică $y = 1$ (imposibil). Deci A este parte stabilă față de legea de compoziție „$*$".

2) Fie $x, y, z \in A$.

$$(x * y) * z = x * (y * z) \Leftrightarrow x^{\alpha \log_a y} * z = x * y^{\alpha \log_a z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^{\alpha \log_a y})^{\alpha \log_a z} = x^{\alpha \log_a y^{\alpha \log_a z}} \Leftrightarrow x^{\alpha^2 \log_a y \cdot \log_a z} = x^{\alpha^2 \log_a z \cdot \log_a y}.$$

Deci legea de compoziție este asociativă.

3) Fie $x, y \in A$

$$x * y = y * x \Leftrightarrow x^{\alpha \log_a y} = y^{\alpha \log_a x} \Leftrightarrow \log_a x^{\alpha \log_a y} = \log_a y^{\alpha \log_a x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha \log_a y \cdot \log_a x = \alpha \log_a x \cdot \log_a y.$$

Deci, legea de compoziție este comutativă.

4) Căutăm $\theta \in A$ astfel încît $x * \theta = x$, $(\forall)\ x \in A$.

$$x * \theta = x \Leftrightarrow x^{\alpha \log_a \theta} = x \Leftrightarrow \alpha \log_a \theta = 1 \Leftrightarrow \log_a \theta = \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \theta = a^{\frac{1}{\alpha}}$$

(element neutru).

5) Fie $x \in A$. Căutăm $x' \in A$ astfel încît $x * x' = \theta$.

$$x * x' = \theta \Leftrightarrow x^{\alpha \log_a x'} = a^{1/\alpha} \Leftrightarrow \log_a x^{\alpha \log_a x'} = \log_a a^{1/\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha \log_a x' \cdot \log_a x = \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \log_a x' = \frac{1}{\alpha^2 \log_a x} \Leftrightarrow x' = a^{1/\alpha^2 \log_a x}.$$

(simetricul elementului x față de legea de compoziție „$*$").

Deci $G_{a,\alpha}$ este grup abelian.

b) Fie $f : \mathbf{R}^* \to A$, $f(x) = a^{x/\alpha}$.

Demonstrăm că f este injectivă :

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow a^{x_1/\alpha} = a^{x_2/\alpha} \Rightarrow \frac{x_1}{\alpha} = \frac{x_2}{\alpha} \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Fie $y \in A$.

$$f(x) = y \Leftrightarrow a^{x/\alpha} = y \Leftrightarrow \frac{x}{\alpha} = \log_a y \Leftrightarrow x = \alpha \log_a y \in \mathbf{R}^*.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci f este surjectivă.
Fie $x, y \in \mathbf{R}^*$. Avem :

$$f(xy) = f(x) * f(y) \Leftrightarrow a^{xy/\alpha} = f(x)^{\alpha \log_a f(y)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^{xy/\alpha} = (a^{x/\alpha})^{\alpha \log_a a^{y/\alpha}} \Leftrightarrow a^{xy/\alpha} = (a^{x/\alpha})^{\alpha \cdot y/\alpha} \Leftrightarrow a^{xy/\alpha} = a^{xy/\alpha}.$$

Deci $\mathbf{R}^* \simeq G_{a,\alpha}$.
Analog $\mathbf{R}^* \simeq G_{b,\beta}$.
Deci, $G_{a,\alpha} \simeq G_{b,\beta}$.

VI

26. Facem $x = y = 0$ în egalitatea din enunț. Obținem :

$$f^3(0) = 1, \text{ de unde } f(0) = 1.$$

Pentru $y = x$ obținem $f^2(x) \cdot f(0) = 1$,

$$\text{de unde } f^2(x) = 1, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

Pentru $x = 0$ obținem :

$$f(0) \cdot f(y) \cdot f(-y) = 1, \text{ de unde}$$

$$f(y) \cdot f(-y) = 1, \ (\forall)\ y \in \mathbf{R}.$$

Dacă $f(y) = 1$ avem $f(-y) = 1$ iar dacă $f(y) = -1$ avem $f(-y) = -1$.
Deci $f(-y) = f(y)$, $(\forall)\ y \in \mathbf{R}$, adică f este o funcție pară.
Pentru $y = -x$ obținem :

$$f(x) \cdot f(-x) \cdot f(2x) = 1, \text{ echivalentă cu } f^2(x) \cdot f(2x) = 1.$$

Dar $f^2(x) = 1$, deci $f(2x) = 1$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.
Înlocuind în ultima egalitate x cu $\frac{x}{2}$ obținem :

$$f(x) = 1, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

27. Se impun următoarele condiții : $a + bx \geqslant 0$, $b + cx \geqslant 0$, $c + ax \geqslant 0$, $b - ax \geqslant 0$, $c - bx \geqslant 0$, $a - cx \geqslant 0$.
Observăm că $x = 0$ este soluție a ecuației.
Notăm $f(x) = \sqrt{a + bx} + \sqrt{b + cx} + \sqrt{c + ax}$, funcție strict crescătoare, ca sumă de funcții strict crescătoare, și $g(x) = \sqrt{b - ax} + \sqrt{c - bx} + \sqrt{a - cx}$, funcție strict descrescătoare, ca sumă de funcții strict descrescătoare.
Faptul că $x = 0$ este soluție implică $f(0) = g(0)$ (1)
Demonstrăm unicitatea soluției.
Presupunem că există o soluție $x' > 0$. Din monotoniile funcțiilor f și g rezultă $f(x') > f(0)$ (2),

$$g(x') < g(0) \quad (3)$$

(1), (2), (3) implică $f(x') > f(0) = g(0) > g(x')$, deci $f(x') \neq g(x')$, în contradicție cu faptul că x' este soluție. Rezultă că presupunerea făcută este falsă. Analog se arată că ecuația nu poate admite o soluție $x'' < 0$.

Scanned with OKEN Scanner

28. Observăm că $x = 0$ nu este soluție a ecuației. Împărțim ecuația cu x^2. Obținem :

$$9\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 8\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 = 0$$

Notăm $x + \frac{1}{x} = y$. Prin ridicare la pătrat obținem :

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$$

Înlocuind obținem ecuația :

$$9y^2 + 8y - 4 = 0$$

avînd rădăcinile:

$$y_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{208}}{18} = \frac{-4 \pm \sqrt{52}}{9}$$

Pentru $k = 1, 2$ avem ecuațiile :

$$x + \frac{1}{x} = y_k \text{ de unde avem}$$

$$x^2 - xy_k + 1 = 0$$

$$\Delta_k = y_k^2 - 4$$

$$|y_k| = \left|\frac{-4 \pm \sqrt{52}}{9}\right| \leqslant \left|-\frac{4}{9}\right| + \left|\frac{52}{9}\right| < 2$$

Deci $y_k^2 < 4$. Atunci avem $\Delta_k < 0$.
Rădăcinile ecuației date sînt :

$$x_{1,2,3,4} = \frac{y_k \pm \sqrt{y_k^2 - 4}}{2} = \frac{y_k \pm i\sqrt{4 - y_k^2}}{2} \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$$

Rezultă că :

$$|x_{1,2,3,4}| = \sqrt{\frac{y_k^2}{4} + \frac{4 - y_k^2}{4}} = 1.$$

29. La egalitatea din enunț adunăm matricea unitate I_n.

$$ABC + AB + BC + AC + A + B + C + I_n = I_n,$$

de unde avem succesiv :

$$AB(C + I_n) + B(C + I_n) + A(C + I_n) + (C + I_n) = I_n,$$
$$(AB + B + A + I_n)(C + I_n) = I_n,$$
$$[A(B + I_n) + (B + I_n)](C + I_n) = I_n,$$
$$(A + I_n)(B + I_n)(C + I_n) = I_n \quad (*)$$
$$\det (A + I_n)(B + I_n)(C = I_n) = \det I_n,$$
$$\det (A + I_n) \cdot \det (B + I_n) \cdot \det (C + I_n) = 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din ultima egalitate avem $\det(A + I_n) \neq 0$, deci matricea $A + I_n$ este inversabilă.
Înmulțind egalitatea (*) la stînga cu $(A + I_n)^{-1}$ obținem

$$(B + I_n)(C + I_n) = (A + I_n)^{-1}.$$

Înmulțind ultima egalitate la dreapta cu $A + I_n$ obținem:

$$(B + I_n)(C + I_n)(A + I_n) = I_n, \text{ de unde avem succesiv:}$$
$$(BC + B + C + I_n)(A + I_n) = I_n$$
$$BCA + BC + BA + B + CA + C + A + I_n = I_n$$
$$BCA + BC + BA + CA + B + C + A = 0.$$

Din această egalitate și cea din enunț obținem:

$$ABC + AB + BC + AC + A + B + C = BCA + BC + BA + CA + B + C + A$$

de unde $$ABC + AB + AC = BCA + BA + CA$$

sau $$ABC + A(B + C) = BCA + (B + C)A.$$

Din ipoteză rezultă că matricele A și $B + C$ comută, adică

$$A(B + C) = (B + C)A.$$

Atunci, obținem $ABC = BCA$, adică $A(BC) = (BC)A$, deci matricele A și BC comută.

30. Fie $M_{a,b} \in G$, $M_{c,d} \in G$. Atunci $\det(M_{a,b}) = 1$, $\det(M_{c,d}) = 1$.

$$M_{a,b} \cdot M_{c,d} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d & d \\ d & c & d \\ d & d & c \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ac + 2bd & ad + bc + bd & ad + bd + bc \\ bc + ad + bd & 2bd + ac & bd + ad + bc \\ bc + bd + ad & bd + bc + ad & 2bd + ac \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f & f \\ f & e & f \\ f & f & e \end{pmatrix}$$

unde $e = ac + 2bd$, $f = ad + bc + bd$.

$$\det(M_{a,b} \cdot M_{c,d}) = \det(M_{a,b}) \cdot \det(M_{c,d}) = 1.$$

Deci $M_{a,b} \cdot M_{c,d} \in G$.
Înmulțirea este asociativă (se verifică prin calcul). Matricea

$$I = M_{1,0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

deoarece $\det M_{1,0} = 1$.
Fie $M_{a,b} \in G \Rightarrow \det(M_{a,b}) = 1 \neq 0$, deci $M_{a,b}$ este inversabilă. Există $M_{a,b}^{-1}$ cu proprietatea $M_{a,b} \cdot M_{a,b}^{-1} = I$.
Atunci $\det(M_{a,b}) \cdot \det(M_{a,b}^{-1}) = 1$.
Cum $\det(M_{a,b}) = 1$, avem $\det(M_{a,b}^{-1}) = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Inversăm matricea $M_{a,b}$. Complementii algebrici sînt :

$$\delta_{11} = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2, \qquad \delta_{12} = -\begin{vmatrix} b & b \\ b & a \end{vmatrix} = -ab + b^2,$$

$$\delta_{13} = \begin{vmatrix} b & a \\ b & b \end{vmatrix} = b^2 - ba, \qquad \delta_{21} = -\begin{vmatrix} b & b \\ b & a \end{vmatrix} = -ba + b^2,$$

$$\delta_{22} = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2, \qquad \delta_{23} = -\begin{vmatrix} a & b \\ b & b \end{vmatrix} = -ab + b^2,$$

$$\delta_{31} = \begin{vmatrix} b & b \\ a & b \end{vmatrix} = b^2 - ab, \qquad \delta_{32} = -\begin{vmatrix} a & b \\ b & b \end{vmatrix} = -ab + b^2,$$

$\delta_{33} = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2$. Deci :

$$M_{a,b}^{-1} = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & b^2 - ab & b^2 - ab \\ b^2 - ab & a^2 - b^2 & b^2 - ab \\ b^2 - ab & b^2 - ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix} \in G.$$

Am arătat că $(G, .)$ este grup.

VII

31. Presupunem că există $x \in X$, $x > 0$. Atunci $x + |x| = 2x \in X$, $2x + |2x| = 4x \in X$ etc. și $x < 2x < 4x < \ldots$ adică X conține o infinitate de elemente, în contradicție cu cerința problemei ca X să fie o mulțime finită. Deci presupunerea făcută este falsă.

Fie $x \in X$, $x < 0$. Atunci $x + |x| = x - x = 0 \in X$.

Deci, o dată cu un element strict negativ, mulțimea X va conține obligatoriu și pe O.

Rezultă că orice mulțime finită X formată din 0 și eventual numere strict negative este soluție a problemei.

32. Notăm :

$$b + c - a = x, \; c + a - b + y, \; a + b - c = z.$$

Adunînd egalitățile obținem :

$$a + b + c = x + y + z.$$

Scăzînd pe rînd cele trei egalități din ultima egalitate, obținem :

$$a = \frac{y+z}{2}, \qquad b = \frac{x+z}{2}, \qquad c = \frac{x+y}{2}.$$

Înlocuind în inegalitatea dată obținem :

$$\frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} \geqslant 3 \Leftrightarrow \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) \geqslant 6,$$

inegalitate adevărată deoarece fiecare paranteză este mai mare sau egală decît 2.

Scanned with OKEN Scanner

33. Observăm că $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$ este soluție a sistemului. Demonstrăm unicitatea soluției.

Presupunem că sistemul admite o soluție $(x, y) \neq \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$.

Avem următoarele situații:

1) $x < \frac{1}{2}$, $y < \frac{1}{3}$.

Atunci $\left(\frac{1}{4}\right)^x > \left(\frac{1}{4}\right)^{1/2}$ și $\left(\frac{1}{27}\right)^y > \left(\frac{1}{27}\right)^{1/3}$.

Adunînd obținem $\left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{27}\right)^y > \frac{5}{6}$.

Cum perechea (x, y) este soluție a sistemului avem:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{27}\right)^y = \frac{5}{6},$$

deci contradicție.

2) $x > \frac{1}{2}$, $y > \frac{1}{3}$ se tratează analog cazului 1)

3) $x < \frac{1}{2}$, $y > \frac{1}{3}$.

Atunci $\log_{1/4} x < \log_{1/4} \frac{1}{2}$ și $\log_{1/27} y < \log_{1/27} \frac{1}{3}$

de unde $-\log_{1/27} y > -\log_{1/27} \frac{1}{3}$.

Prin adunare obținem:

$$\log_{1/4} x - \log_{1/27} y > \frac{1}{6}.$$

Dar pereche (x, y) este soluție a sistemului, deci

$$\log_{1/4} x - \log_{1/27} y = \frac{1}{6},$$

contradicție.

4) $x > \frac{1}{2}$, $y < \frac{1}{3}$ se trasează analog cazului 3).

5) $x = \frac{1}{2}$, $y \neq \frac{1}{3}$.

Din $\left(\frac{1}{4}\right)^{1/2} + \left(\frac{1}{27}\right)^y = -\frac{5}{6}$ rezultă $\left(\frac{1}{27}\right)^y = \frac{1}{3}$.

de uhde $y = \frac{1}{3}$, contradicție.

6) $x \neq \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$ se tratează analog cazului 5).

Presupunerea făcută că soluția $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ nu este unică este falsă.

Scanned with OKEN Scanner

34. Fie $1, \varepsilon, \varepsilon^2$ rădăcinile de ordinul trei ale unității. Atunci $\varepsilon^3 = 1$ și $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$.

$$(A + \varepsilon B)(A + \varepsilon^2 B) = A^2 + \varepsilon^2 AB + \varepsilon BA + \varepsilon^2 B^2 =$$
$$= A^2 + B^2 + (-1 - \varepsilon)AB + \varepsilon BA = (A^2 + B^2 - AB) +$$
$$+ \varepsilon(BA - AB) = \varepsilon(BA - AB).$$

Atunci $\det(A + \varepsilon B)(A + \varepsilon^2 B) = \det \varepsilon(BA - AB)$, de unde

$$\det(A + \varepsilon B) \cdot \det(A + \varepsilon^2 B) = \varepsilon^n \det(BA - AB) \qquad (*)$$

Notăm $A + \varepsilon B = C$, matricele A, B, C având respectiv elementele a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}. Atunci

$$c_{ij} = a_{ij} + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} b_{ij} = \left(a_{ij} - \frac{1}{2} b_{ij}\right) + i\frac{\sqrt{3}}{2} b_{ij}.$$

Notăm $A + \varepsilon^2 B = D$, matricea D având elementele d_{ij}. Avem:

$$d_{ij} = a_{ij} + \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} b_{ij} = \left(a_{ij} - \frac{1}{2} b_{ij}\right) - i\frac{\sqrt{3}}{2} b_{ij} = \overline{c_{ij}}.$$

Atunci $\det D = \overline{\det C}$.
Egalitatea (*) devine succesiv:

$$\det C \cdot \det D = \varepsilon^n \det(BA - AB)$$
$$\det C \cdot \overline{\det C} = \varepsilon^n \det(BA - AB).$$

Dar $\det C \cdot \overline{\det C} = (\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) = \alpha^2 + \beta^2 \geqslant 0$.
Atunci $\varepsilon^n \det(BA - AB) \geqslant 0$.
Cum $BA - AB$ este inversabilă, avem $\det(BA - AB) \neq 0$.
De asemenea, $\varepsilon^n \neq 0$.
Atunci $\varepsilon^n \det(BA - AB) > 0$ (**)
Dacă $n = 3k + 1$ sau $n = 3k + 2$ atunci

$$\varepsilon^n \in C - R \text{ și } \varepsilon^n \det(BA - AB) \in C - R$$

în contradicție cu (**).
Atunci $n = 3k$.

35. Presupunem că $(\mathbf{Z}, +) \simeq (\mathbf{Q}, +)$.
Atunci $(\exists)\ f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$, f bijectivă astfel încît

$$f(x + y) = f(x) + f(y),\ (\forall)\ x, y \in \mathbf{Z}.$$

Pentru $x = y = 0$ obținem $f(0) = 0$, $f(2) = f(1 + 1) = f(1) + f(1) = 2f(1) = 2a$,
unde am notat $f(1) = a$.
Presupunem $f(k) = ka$. Atunci

$$f(k + 1) = f(k) + f(1) = ka + a = (k + 1)a.$$

Am demonstrat prin inducție matematică egalitatea:

$$f(n) = na,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}.$$

Pentru $y = -x$ obținem $f(0) = f(x) + f(-x)$, de unde

$$f(-x) = -f(x),\ (\forall)\ x \in \mathbf{Z}, \text{ adică } f \text{ este funcție impară.}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $n \in \mathbf{N}^*$ avem

$$f(-n) = -f(n) = -na, \text{ deci}$$

$$f(x) = xa, \ (\forall)\ x \in \mathbf{Z}, \text{ unde } a = f(1) \in \mathbf{Q}.$$

Atunci a are forma :

$$a = \frac{m}{n} \text{ cu } m, n \in \mathbf{Z}, n > 0.$$

Deci, $f(x) = x \cdot \frac{m}{n}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{Z}$.

f fiind surjectivă, pentru $\frac{1}{n+1} \in \mathbf{Q}$, $(\exists)\ x \in \mathbf{Z}$ astfel încît $f(x) = \frac{1}{n+1}$.

Dar $f(x) = x \cdot \frac{m}{n}$.

Atunci $\frac{xm}{n} = \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow xm(n+1) = n$

Ultima egalitate arată că $n + 1$ divide n, fals.
Rezultă presupunerea falsă.
Deci $(\mathbf{Z}, +) \ncong (\mathbf{Q}, +)$.

VIII

36. Fie $x \in A$. Atunci $x \in \mathbf{Z}$ și

$$\frac{x^3 - 3x + 2}{2x + 1} \in \mathbf{Z}. \text{ Atunci}$$

$$8 \cdot \frac{x^3 - 3x + 2}{2x + 1} \in \mathbf{Z}.$$

Prin împărțire obținem :

$$4x^2 - 2x - 1 + \frac{17}{2x + 1} \in \mathbf{Z}.$$

Dar $4x^2 - 2x - 1 \in \mathbf{Z}$. Atunci

$2x + 1$ divide $17 \Rightarrow 2x + 1 \in \{\pm 1, \pm 17\} \Rightarrow x \in \{0, 8, -1, -9\}$.

Deci $A \subset \{0, 8, -1, -9\}$.

Pentru $x = 0 \Rightarrow \frac{x^3 - 3x + 2}{2x + 1} = 2 \in \mathbf{Z} \Rightarrow 0 \in A$.

Pentru $x = 8 \Rightarrow \frac{x^3 - 3x + 2}{2x + 1} = \frac{490}{17} \notin \mathbf{Z} \Rightarrow 8 \notin A$.

Pentru $x = -1 \Rightarrow \frac{x^3 - 3x + 2}{2x + 1} = -4 \in \mathbf{Z} \Rightarrow -1 \in A$.

Pentru $x = -9 \Rightarrow \frac{x^3 - 3x + 2}{2x + 1} = \frac{-700}{-17} \notin \mathbf{Z} \Rightarrow -9 \notin A$.

Deci $A = \{-1, 0\}$.

Scanned with OKEN Scanner

37. Notăm $b - a = m > 0$, $c - b = n > 0$, $d - c = p > 0$, de unde

$$b = a + m,$$

$$c = b + n = a + m + n,$$

$d = c + p = a + m + n + p$. Atunci $(a + b + c + d)^2 > 8(ac + bd) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a + a + m + a + m + n + a + m + n + p)^2 > 8[a(a + m + p) +$

$+ (a + m)(a + m + n + p)] \Leftrightarrow (4a + 3m + 2n + p)^2 >$

$> 8(2a^2 + 3am + 2an + ap + m^2 + mn + mp)$,

unde $a \in \mathbf{R}$ și $m, n, p \in (0, +\infty) \Leftrightarrow$

$16a^2 + 9m^2 + 4n^2 + p^2 + 24am + 16an + 8ap + 12mn + 6mp + 4np >$

$> 16a^2 + 24am + 16an + 8ap + 8m^2 + 8mn + 8np \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m^2 + 4n^2 + p^2 + 4mn - 2mp + 4np > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (m - p)^2 + 4n^2 + 4mn + 4np > 0$,

inegalitate adevărată.

38. Notînd rădăcinile polinomului cu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ avem

$$|x_1| = |x_2| = \ldots = |x_n|.$$

Ultima formulă Viete este:

$$x_1 x_2 \ldots x_n = (-1)^n \cdot \frac{(-1)^n}{1} = 1, \text{ de unde}$$

$$|x_1| \cdot |x_2| \ldots |x_n| = 1.$$

Cum modulele sînt egale, avem

$$|x_1| = |x_2| = \ldots = |x_n| = 1.$$

Polinomul P se scrie sub forma:

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n), \text{ de unde}$$

$$P(-1) = (-1 - x_1)(-1 - x_2) \ldots (-1 - x_n) = (-1)^n (1 + x_1) \cdot$$

$$\cdot (1 + x_2) \ldots (1 + x_n).$$

Atunci:

$$\overline{P(-1)} = \overline{(-1)^n (1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_n)} =$$

$$= (-1)^n (1 + \bar{x}_1)(1 + \bar{x}_2) \ldots (1 + \bar{x}_n).$$

Se știe că dacă un număr complex z are modulul 1 atunci $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

Atunci:

$$\overline{P(-1)} = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{x_1}\right)\left(1 + \frac{1}{x_2}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{x_n}\right) =$$

$$= (-1)^n \frac{(x_1 + 1)(x_2 + 1) \ldots (x_n + 1)}{x_1 x_2 \ldots x_n} = P(-1).$$

Din $\overline{P(-1)} = P(-1)$ rezultă $P(-1) \in \mathbf{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

39. Fie A o matrice inversabilă.
Egalitatea $AB - B^2A^2 = U$, o înmulțim la stînga cu A^{-1} și la dreapta cu A. Obținem:

$$A^{-1}(AB - B^2A^2)A = A^{-1}A, \text{ de unde}$$

$$BA - A^{-1}B^2A^3 = U \qquad (*)$$

Egalitatea $A^3 + B^3 = 0$ o scriem
$A^3 = -B^3$. Atunci

$$-B^5 = B^2(-B^3) = (-B^3)B^2 \text{ de unde}$$

$$B^2A^3 = A^3B^2.$$

Înmulțind cu A^{-1} la stînga obținem:

$$A^{-1}B^2A^3 = A^2B^2.$$

Înlocuind în (*) obținem:

$$BA - A^2B^2 = U.$$

Dacă B este inversabilă procedăm asemănător.

40. Presupunem că avem $(\mathbf{Q}, +) \simeq (\mathbf{R}, +)$.
Atunci $(\exists)\ f : \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$, f bijectivă astfel încît

$$f(x + y) = f(x) + f(y),\ (\forall)\ x, y \in \mathbf{Q}.$$

Fie $\sqrt{2}$, $1 \in \mathbf{R}$. Deoarece f este surjectivă $(\exists)\ a, b \in \mathbf{Q}$ astfel încît:

$$f(a) = \sqrt{2} \text{ și } f(b) = 1.$$

Cum $a \neq 0$, $b \neq 0$ există $m, n \in \mathbf{Z}^*$ astfel încît $ma = nb$.
Atunci $f(ma) = f(nb)$, de unde
$mf(a) = nf(b)$, adică
$m\sqrt{2} = n \cdot 1$, egalitate care conduce la
$\sqrt{2} = \frac{n}{m}$, absurd deoarece
$\sqrt{2} \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ iar $\frac{n}{m} \in \mathbf{Q}$.
Presupunerea este falsă.
Deci $(\mathbf{Q}, +) \not\simeq (\mathbf{R}, +)$.

IX

41. Notăm $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.
Fie submulțimile:

$$A_1 = \{a_1\},\ A_2 = \{a_1, a_2\},\ \ldots,\ A_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Notăm $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $\ldots$, $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.
Împărțim numerele $S_1, S_2, \ldots, S_n$ la n. Obținem resturile $r_1, r_2, \ldots, r_n$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă cel puțin un rest $r_k = 0$, atunci A_k este mulțimea căutată.
Dacă toate resturile aparțin mulțimii $\{1, 2, \ldots, n-1\}$, atunci două resturi sînt egale. Deci există $i < j$ astfel încît $r_i = r_j = r$ (notație).
Avem $S_i = nq_1 + r$ și $S_j = nq_2 + r$.
Atunci $S_j - S_i = n(q_2 - q_1)$, deci $S_j - S_i$ se divide cu n.
Mulțimea $\{a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_j\}$ are suma elementelor $a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_j = S_i - S_j$ care se divide la n.
Deci, mulțimea $\{a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_j\}$ este submulțimea căutată.

42. Scriem ecuația dată ca ecuație de gradul al II-lea în x cu coeficienți reali.

$$(y^4 + 1)x^2 - (16y^3 + 4y)x + 68y^2 = 0.$$

Pentru ca ecuația să admită rădăcini reale trebuie să avem $\Delta \geqslant 0$.
Dar $\Delta = (16y^3 + 4y)^2 - 4 \cdot 68y^2(y^4 + 1) = 16y^2[(4y^2 + 1)^2 - 17(y^4 + 1)] = 16y^2(-y^4 + 8y^2 - 16) = -16y^2(y^2 - 4)^2$.
Deoarece $y \in R$ avem $\Delta \leqslant 0$.
Deci $\Delta = 0$, de unde $y = 0$, $y = 2$, $y = -2$.

I) Pentru $y = 0$ avem ecuația:

$$x^2 = 0, \text{ de unde } x = 0.$$

II) Pentru $y = 2$ avem ecuația:

$$17x^2 - 136x + 272 = 0 \text{ avînd rădăcina } x = 4.$$

III) Pentru $y = -2$ avem ecuația:

$$17x^2 + 136x + 272 = 0 \text{ avînd rădăcina } x = -4.$$

Deci, soluțiile ecuației sînt:

$$x = 0,\ y = 0;\ x = 4,\ y = 2;\ x = -4,\ y = -2.$$

43. $C_m^m \cdot C_k^m + C_{m+1}^m \cdot C_n^{m+1} + \ldots + C_n^m \cdot C_n^n = \sum_{k=m}^{n} C_k^m \cdot C_n^k =$

$$= \sum_{k=m}^{n} \frac{k!}{m!\,(k-m)!} \cdot \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \sum_{k=m}^{n} \frac{n!}{m!} \cdot \frac{1}{(k-m)!\,(n-k)!} =$$

$$= \sum_{k=m}^{n} \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \cdot \frac{(n-m)!}{(k-m)!\,(n-k)!} = \sum_{k=m}^{n} C_n^m \cdot C_{n-m}^{n-k} = C_n^m \sum_{k=m}^{n} C_{n-m}^{n-k} =$$

$$= C_n^m (C_{n-m}^{n-m} + C_{n-m}^{n-m-1} + \ldots + C_{n-m}^{0}) = C_n^m \cdot 2^{n-m}.$$

44. Fie matricele $A_1 = (a_{ij})$ și $B_1 = (\overline{a_{ij}})$; $A_1, B_1 \in M_n(\mathbf{R})$.

$$\det A_1 = \sum_{\sigma \in Sn} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)},$$

$$\det B_1 = \sum_{\sigma \in Sn} \varepsilon(\sigma) \overline{a_{1\sigma(1)}} \cdot \overline{a_{2\sigma(2)}} \ldots \overline{a_{n\sigma(n)}} =$$

$$= \sum_{\sigma \in Sn} \overline{\varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}} =$$

$$= \sum_{\sigma \in Sn} \overline{\varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}} = \det \overline{A_1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie $A = (a_{kj})$, $B = (b_{kj})$; $A, B \in M_n(\mathbf{R})$.

$$A + iB = (a_{kj} + ib_{kj})$$

$$A - iB = (a_{kj} - ib_{kj}) = \overline{(a_{kj} + ib_{kj})}.$$

Atunci :

$$A^2 + B^2 = (A + iB)(A - iB) ;$$

$\det(A^2 + B^2) = \det(A + iB)(A - iB) = \det(A + iB) \cdot \det(A - iB) =$

$= \det(A + iB) \cdot \overline{\det(A + iB)}$. Notăm $\det(A + iB) = \alpha + i\beta$.

Atunci $\det(A^2 + B^2) = (\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) = \alpha^2 + \beta^2 \geqslant 0$.

45. Deoarece m și n sînt prime între ele, există $a, b \in \mathbf{Z}$ astfel încît $a \cdot m + b \cdot n = 1$.

Avem $xy = (xy)^{am+bn} = [(xy)^m]^a[(xy)^n]b = [(yx)^m]^a[(yx)^n]b =$

$= (yx)^{am}(yx)b^n = (yx)^{am+bm} = yx$.

Deci $xy = yx$, $(\forall)$ $x, y \in G$, adică grupul G este abelian;

X

46. a) $f(x_1) = f(x_2)$ implică

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)), \text{ adică } (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2).$$

Dar $g \circ f$ este funcție injectivă.
Atunci rezultă $x_1 = x_2$.
Deoarece $f(x_1) = f(x_2)$ implică $x_1 = x_2$, funcția f este injectivă.
b) Fie $Z \in C$, element arbitrar. Deoarece $g \circ f$ este surjectivă, rezultă că există $x \in A$ astfel încît $(g \circ f)(x) = z$, adică $g(f(x)) = z$.
Notăm $f(x) = y \in B$.
Atunci $g(y) = z$, deci, oricare ar fi $z \in C$, există $y \in B$ astfel încît $g(y) = z$
În concluzie, g este surjectivă.

47. Notăm $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = c \in \mathbf{Q}^*$.
Ridicăm la cub : $a + 3\sqrt[3]{a^2b} + 3\sqrt[3]{ab^2} + b = c^3$, echivalentă cu $a + b + \sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) + b = c^3$,
de unde $\sqrt[3]{ab} = \dfrac{c^3 - a - b}{3c} \in \mathbf{Q}$.

Notăm $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = 2p$ și $\sqrt[3]{ab} = q$ cu $p, q \in \mathbf{Q}$.
Fie ecuația $x^2 - 2px + q = 0$ avînd rădăcinile $x_1 = \sqrt[3]{a}$ și $x_2 = \sqrt[3]{b}$.
Rezolvînd ecuația obținem :

$$x_{1,2} = p \pm \sqrt{p^2 - q}.$$

Avem condițiile $p^2 - q \geqslant 0$ și $p \neq 0$.
Atunci $\sqrt[3]{a} = p + \sqrt[3]{p^2 - q}$. Ridicăm la cub :

$$a = p^3 + 3p^2\sqrt{p^2 - q} + 3p(p^2 - q) + (p - q)\sqrt{p^2 - q}$$

pe care o mai scriem sub forma :

$$a = (4p^3 - 3pq) + (4p^2 - q)\sqrt{p^2 - q}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Presupunem $\sqrt{p^2-q} \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$.
Atunci avem sistemul:

$$\begin{cases} 4p^2-q=0 \\ 4p^3-3pq=0. \end{cases}$$

Prima ecuație o scriem sub forma $3p^2+(p^2-q)=0$.
Dar $3p^2>0$ și $p^2-q \geqslant 0$, deci egalitatea este imposibilă. Rezultă că presupunerea făcută este falsă. Deci $\sqrt{p^2-q} \in \mathbf{Q}$. Atunci $x_1,\ x_2 \in \mathbf{Q}$ deci

$$\sqrt[3]{a} \in \mathbf{Q} \text{ și } \sqrt[3]{b} \in \mathbf{Q}.$$

48. Avem condițiile: $x>0,\ x \neq 1$.
Notăm: $\log_6 x = t$.
Atunci $\log_x 6 = \dfrac{1}{\log_6 x} = \dfrac{1}{t}$;

$$\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{x} = \frac{\log_6 \frac{1}{x}}{\log_6 \frac{1}{6}} = \frac{-\log_6 x}{-\log_6 6} = \log_6 x = t,$$

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{6} = \frac{\log_6 \frac{1}{6}}{\log_6 \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{-1}{-\frac{1}{2}\log_6 x} = \frac{2}{t},$$

$$\log_{\sqrt{6}} x = \frac{\log_6 x}{\log_6 \sqrt{6}} = \frac{t}{\frac{1}{2}} = 2t.$$

Înlocuind, obținem:

$$\frac{1}{t^2}+t^2+\frac{2}{t}+2t+\frac{3}{4}=0.$$

Notăm $t+\dfrac{1}{t}=y$. Prin ridicarea la pătrat obținem:

$$t^2+\frac{1}{t^2}=y^2-2$$

Înlocuind în ecuația în t, obținem o ecuație în y:

$$y^2-2+2y+\frac{3}{4}=0, \text{ adică}$$

$$4y^2+8y-5=0$$

avînd rădăcinile $y_1=\dfrac{1}{2},\ y_2=-\dfrac{5}{2}$.

I) $t+\dfrac{1}{t}=\dfrac{1}{2}$

$$2t^2-t+2=0$$

$\Delta = 1-16<0$, deci $t \in \mathbf{C}-\mathbf{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

II) $t+\frac{1}{t}=-\frac{5}{2}$

$$2t^2+5t+2=0.$$

Ecuația are rădăcinile $t_1=-\frac{1}{2}$, $t_2=-2$, deci $\log_6 x=-\frac{1}{2}$ având soluția

$$x=6^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$\log_6 x=-2$ având soluția $x=6^{-2}=\frac{1}{36}$.

49. a)

Fie $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$.

Atunci:

$$B=\begin{pmatrix} 0 & a_{12}-a_{21} & a_{13}-a_{31} & a_{14}-a_{41} \\ a_{21}-a_{12} & 0 & a_{23}-a_{32} & a_{24}-a_{42} \\ a_{31}-a_{13} & a_{32}-a_{23} & 0 & a_{34}-a_{43} \\ a_{41}-a_{14} & a_{42}-a_{24} & a_{43}-a_{34} & 0 \end{pmatrix}$$

Notăm: $a_{12}-a_{21}=a$, $a_{13}-a_{21}=b$, $a_{14}-a_{41}=c$, $a_{23}-a_{32}=d$, $a_{24}-a_{42}=e$, $a_{34}-a_{43}=f$. Atunci

$$B=\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det B=-a\begin{vmatrix} -a & d & e \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{vmatrix}+b\cdot\begin{vmatrix} -a & 0 & e \\ -b & -d & f \\ -c & -e & 0 \end{vmatrix}-$$

$$-c\cdot\begin{vmatrix} -a & 0 & d \\ -b & -d & 0 \\ -c & -e & -f \end{vmatrix}=-a(bef-cdf-af^2)+b(be^2-cde-$$

$-aef)-c(-adf+bde-cd^2)=-abef+acdf+a^2f^2+b^2e^2-$

$-bcde-abef+acdf-bcde+c^2d^2=a^2f^2+b^2e^2+c^2d^2-$

$-2abef+2acdf-2bcde=(af-be+cd)^2\geqslant 0.$

b) ${}^tB={}^t(A-{}^tA)={}^tA-A=-B$.

Atunci $\det({}^tB)=\det(-B)=(-1)^n\det B=-\det B$, deoarece n este un număr impar.

Dar $\det({}^tB)=\det B$.

Rezultă $\det B=-\det B$ de unde $\det B=0$.

50. Presupunem că avem $(\mathbf{Q}^*,\cdot)\simeq(\mathbf{R}^*,\cdot)$. Atunci există funcția bijectivă $f:\mathbf{Q}^*\to\mathbf{R}^*$ astfel încît

$$f(xy)=f(x)\cdot f(y),\ (\forall)\ x,y\in\mathbf{Q}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie $f(2) = a$, $a \in \mathbf{R}^*$. Atunci există $b \in \mathbf{R}^*$ astfel încît $b^3 = a$. f fiind surjectivă, există $x \in \mathbf{Q}^*$ astfel încît $f(x) = b$.
Atunci $b^3 = f^3(x) = f(x^3)$.
Dar $b^3 = a = f(2)$ și deoarece f este injectivă avem $x^3 = 2$, adică $x = \sqrt[3]{2}$, contradicție.
Rezultă că presupunerea făcută este falsă, deci $(\mathbf{Q}^*, .) \ncong (\mathbf{R}^*, .)$.

XI

51. a) $f \circ f$ fiind bijectivă rezultă că prima funcție din compunere este surjectivă și a doua este injectivă, deci f este bijectivă.
b) Pentru orice $x \in (0, +\infty)$ avem $f(x) \in (0, +\infty)$.
În egalitatea $(f \circ f)(x) = x^2$ înlocuim x cu $f(x)$. Obținem $(f \circ f)(f(x)) = f^2(x)$, $(\forall)$ x $(0, +\infty)$ care se mai scrie:

$$f((f \circ f)(x)) = f^2(x), \ (\forall) \ x \in (0, +\infty)$$

adică

$$f(x^2) = f^2(x), \ (\forall) \ x \in (0, +\infty).$$

Înlocuind x cu $\sqrt{x}$ obținem:

$$f(x) = f^2(\sqrt{x}), \text{ de unde avem:}$$

$$\sqrt{f(x)} = f(\sqrt{x}), \ (\forall) \ x \in (0, +\infty).$$

52. *Observația* 1. Orice soluție a sistemului (dacă există) are cele trei componente diferite de zero.
Observația 2. Presupunem că o soluție are $x > 0$. Atunci, din prima ecuație avem $y > 0$, iar din a doua avem $z > 0$.
Analog, din $x < 0$ avem $y < 0$ de unde avem $z < 0$, deci o soluție are toate componentele cu același semn.
Observăm, că dacă (x_0, y_0, z_0) este o soluție, atunci avem:

$$\begin{cases} 2y_0 = x_0 + \dfrac{2}{x_0} \\ 2z_0 = y_0 + \dfrac{2}{y_0} \\ 2x_0 = z_0 + \dfrac{2}{z_0} \end{cases}$$

Înmulțind egalitățile cu -1 obținem:

$$\begin{cases} 2(-y_0) = (-x_0) + \dfrac{2}{-x_0} \\ 2(-z_0) = (-y_0) + \dfrac{2}{-y_0} \\ 2(-x_0) = -z_0 + \dfrac{2}{-z_0} \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

ceea ce arată că și $(-x_0, -y_0, -z_0)$ este soluție.
Căutăm soluții (x, y, z) cu toate componentele strict pozitive.
Adunînd ecuațiile sistemului obținem:

$$2(x+y+z) = x+y+z+2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right),$$

$$\text{adică } x+y+z = 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right). \tag{1}$$

Aplicăm inegalitatea mediilor:

$$x+\frac{2}{x} \geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{2}{x}} = 2\sqrt{2}.$$

Adică $2y \geqslant 2\sqrt{2}$, deci $y \geqslant \sqrt{2}$.
Analog $z \geqslant \sqrt{2}$ și $x \geqslant \sqrt{2}$.
Adunînd obține $x+y+z \geqslant 3\sqrt{2}$ (2)
Avem și inegalitățile:

$$\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{z} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}},$$

care adunate dau

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leqslant \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \tag{3}$$

(1), (2), (3) implică

$$3\sqrt{2} \leqslant x+y+z = 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \leqslant 3\sqrt{2}.$$

De unde:

$$x+y+z = 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = 3\sqrt{2}.$$

egalitate care este adevărată numai dacă $x = y = z = \sqrt{2}$. Pe baza observațiilor făcute avem și $x = y = z = -\sqrt{2}$ soluție.

53. Ecuația dată este echivalentă cu:

$$\frac{1}{2}[(2^x-3^x)^2+(3^x-4^x)^2+(4^x-2^x)^2] = 0,$$

de unde obținem $2^x = 3^x = 4^x$
cu soluția unică $x = 0$.

54. $(B+iA)(B-iA) = B^2+iAB-iBA+A^2 = (A^2+B^2)+$
$+i(AB-BA) = i(AB-BA)$ deoarece $A^2+B^2 = 0$.
Atunci:

$$\det(B+iA)(B-iA) = \det i(AB-BA),$$

de unde:

$$\det(B+iA)\cdot\det(B-iA) = i^n\cdot\det(AB-BA).$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie $C = B + iA$ și $C_1 = B - iA$.
Atunci $C = (C_{kj})$ și $C_1 = (\overline{C}_{kj})$, unde

$$C_{kj} = b_{kj} + ia_{kj} \text{ și } \overline{C}_{kj} = b_{kj} - ia_{kj}.$$

Atunci $\det C = \overline{\det C}$

$$\det (B + iA) \cdot \det (B - iA) = \det C \cdot \det C_1 = \det C \cdot \overline{\det C} =$$
$$= (\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) = \alpha^2 + \beta^2 \geqslant 0.$$

Deci $i^n \cdot \det (AB - BA) \geqslant 0$.
a) Dacă $n = 4k$, atunci $i^n = i^4 = 1$, deci

$$\det (AB - BA) \geqslant 0.$$

b) Dacă $n = 4k + 2$, atunci $i^n = i^{4n+2} = i^2 = -1$,
deci $-\det (AB - BA) \geqslant 0$, de unde

$$\det (AB - BA) \leqslant 0.$$

c) Dacă $n = 4k + 1$ sau $n = 4k + 3$, atunci $i^n = i$ sau $i^n = -i$, deci $\pm i \det (AB - BA) \geqslant 0$ (*). Presupunem $\det (AB - BA) \neq 0$. Atunci $\pm i \det (AB - BA) \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$, contradicție cu inegalitatea (*).
Rezultă că presupunerea făcută este falsă, deci

$$\det (AB - BA) = 0.$$

55. Fie $a, c \in G$ elemente arbitrare.
Deoarece f și g sînt morfisme avem $f(ac) = f(a) \cdot f(c)$ și $g(ac) = g(a) \cdot g(c)$ de unde:

$$(ac)^n = a^n c^n \text{ și } (ac)^{n+1} = a^{n+1} c^{n+1}.$$

Dar $(ac)^{n+1} = (ac)^n \cdot ac = a^n c^n ac$.
Deci: $a^n c^n ac = a^{n+1} c^{n+1}$.
Înmulțind la stînga cu $(a^n)^{-1}$ și la dreapta cu c^{-1} obținem

$$c^n a = ac^n \qquad (*)$$

Fie $a, b \in G$, arbitrare.
f fiind surjectivă, $(\exists)\ x \in G$ astfel încît $b = f(c)$, deci $b = c^n$.
Înlocuind în relația (*) obținem:

$$ab = ba,\ (\forall)\ a, b \in G, \text{ deci } G \text{ este abelian.}$$

XII

56. Aplicînd inegalitatea mediilor avem:

$$x^8 + y^8 \geqslant 2\sqrt{x^8 y^8}, \text{ adică}$$
$$x^8 + y^8 \geqslant 2x^4 y^4.$$

Dar $x^8 + y^8 = 8xy - 6$, de unde $8xy - 6 \geqslant 2x^4 y^4$.

Scanned with OKEN Scanner

Notăm : $xy = t$. Obținem inecuația :

$$t^4 - 4t + 3 \leqslant 0.$$

Observăm că $t = 1$ anulează $t^4 - 4t + 3$.
Folosind schema lui Horner inecuația se scrie :

$$(t - 1)^2(t^2 + 2t + 3) \in 0.$$

Cum $t^2 + 2t + 3 < 0$, $(\forall)\ t \in \mathbf{R}$.
obținem $(t - 1)^2 \leqslant 0$. Dar $(t - 1)^2 \geqslant 0$, deci $t = 1$, adică $xy = 1$.
Ecuația dată devine $x^8 + y^8 = 2$.

Înlocuim $y = \frac{1}{x}$ și obținem :

$$x^8 + \frac{1}{x^8} = 2, \text{ de unde } (x^8 - 1)^2 = 0.$$

Ecuația $x^8 = 1$ are rădăcinile reale $x = \pm 1$.
Ecuația dată are soluțiile reale $x = 1$, $y = 1$ și $x = -1$, $y = -1$.

57. Se impun următoarele condiții :

$$\begin{cases} mx^2 - x + 1 \geqslant 0 & (1) \\ mx^2 + x + 1 \geqslant 0 & (2) \\ x \geqslant 0 & (3) \end{cases}$$

Ridicăm ecuația la pătrat :

$$mx^2 - x + 1 + 2\sqrt{(mx^2 + 1)^2 - x^2} + mx^2 + x + 1 = x^2,$$

care se mai scrie :

$$2\sqrt{m^2x^4 + 2mx^2 + 1 - x^2} = x^2 - 2mx^2 - 2.$$

Avem condiția $x^2 - 2mx^2 - 2 \geqslant 0$. (4)
Ridicăm din nou la pătrat :

$$4m^2x^4 + 8mx^2 + 4 - 4x^2 = x^4 + 4m^2x^4 + 4 - 4mx^4 - \\ - 4x^2 + 8mx^2,$$

de unde $x^4(1 - 4m) = 0$.

I) Dacă $m \neq \frac{1}{4}$, atunci $x = 0$, care nu verifică ecuația dată.

II) Dacă $m = \frac{1}{4}$, atunci ecuația dată este :

$$\sqrt{\frac{1}{4}x^2 - x + 1} + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + x + 1} = x.$$

Transformînd succesiv avem :

$$\frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 4x + 4} = x,$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x+2)^2}=2x,$$

$$|x-2|+|x+2|=2x.$$

Din condiția (3) avem $x+2>0$.
Atunci $|x-2|+x+2=2x$

$$|x-2|=x-2,$$

de unde $x\in[2,+\infty)$.

Concluzii:

1) Dacă $m\in\mathbf{R}-\left\{\frac{1}{4}\right\}$, ecuația nu are soluții.

2) Dacă $m=\frac{1}{4}$, atunci orice număr $x\in[2,+\infty)$ este soluție.

58. Demonstrăm egalitatea prin inducție după m.
Scriem egalitatea care trebuie demonstrată sub forma:

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_n^k=(-1)^m C_{n-1}^m.$$

Pentru $m=0$ avem:

$$\sum_{k=0}^{0}(-1)^k C_n^k=(-1)^0 C_{n-1}^0,$$

egalitate adevărată deoarece echivalează cu $1=1$.
Presupunem egalitatea adevărată pentru $m\in\{0,1,\ldots,p-1\}$ cu $p\geqslant 1$.
Demonstrăm că în această situație este adevărată și pentru $m=p$.

$$\sum_{k=0}^{p}(-1)^k C_n^k=\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k C_n^k+(-1)^p C_n^p=(-1)^{p-1}C_{n-1}^{p-1}+$$

$$+(-1)^p C_n^p=(-1)^p(C_n^p-C_{n-1}^{p-1})=(-1)^p(C_{n-1}^p+C_{n-1}^{p-1}-C_{n-1}^{p-1})\ (-1)^p C_{n-1}^p.$$

Am demonstrat că identitatea dată este adevărată pentru orice $m\in\mathbf{N}$, $m\leqslant n-1$.

59. Fie

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

și

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Atunci $AB=\begin{pmatrix}a_{11}&0&0\\a_{21}&0&0\\a_{31}&0&0\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

Scanned with OKEN Scanner

$AB = BA$ duce la $a_{12} = 0$, $a_{13} = 0$, $a_{21} = 0$, $a_{31} = 0$, deci

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Fie $$B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Atunci :

$$AB' = \begin{pmatrix} 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B'A = \begin{pmatrix} 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$AB' = B'A$ duce la $a_{11} = a_{22}$ pe care le notăm cu a și $a_{23} = 0$.
Atunci :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Fie $$B'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Atunci :

$$AB'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ și } B''A = \begin{pmatrix} 0 & a_{32} & a_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$AB'' = B''A$ duce la $a_{32} = 0$ și $a_{33} = a$.

Deci $$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = aI_3.$$

Oricare ar fi matricea $B \in M_3(\mathbf{C})$
avem : $AB = aI_3B = aB$ și

$$BA = B(aI_3) = aBI_3 = aB.$$

Deci $AB = BA$.

60. Arătăm că dacă $a, b \in G$ și $a^2 = b^2$, atunci $a = b$. Fie $a, b \in G$ astfel încît $a^2 = b^2$.
Înmulțim egalitatea la stînga cu b^{-1} și la dreapta cu a^{-1}. Obținem :

$$b^{-1}a^2a^{-1} = b^{-1}b^2a^{-1} \text{ echivalentă cu}$$

$$b^{-1}a = ba^{-1} \qquad (*)$$

Scanned with OKEN Scanner

Conform proprietății (2) avem :

$$(ab^{-1})^2 = (b^{-1}a)^2. \text{ Dar } (b^{-1}a)^2 = (ba^{-1})^2.$$

ba^{-1} se mai scrie $(ab^{-1})^{-1}$, deci :

$$(ba^{-1})^2 = [(ab^{-1})^{-1}]^2 = [(ab^{-1})^2]^{-1}.$$

Deci $(ab^{-1})^2 = [(ab^{-1})^2]^{-1}$.
Înmulțim egalitatea cu $(ab^{-1})^2$ și obținem :

$[(ab^{-1})^2]^2 = 1$, de unde conform proprietății (1) avem :

$(ab^{-1})^2 = 1$, de unde $ab^{-1} = -1$.

Înmulțind la dreapta cu b avem $a = b$.
Deci $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$.
Atunci, $(xy)^2 = (yx)^2 \Rightarrow xy = yx$, adică grupul G este abelian.

XIII

61. Presupunem că oricare ar fi $x, y \in [0, 1]$ avem :

$$|f(x) + g(y) - 4x^2y| < 1,$$

echivalent cu $-1 < f(x) + g(y) - 4x^2y < 1$ (*)
În (*) înlocuim pe rînd :

$x = y = 0$. Avem $-1 < f(0) + g(0) < 1$ (1)

$x = 0, y = 1$. Avem $-1 < f(0) + g(1) < 1$ (2)

$x = 1, y = 0$. Avem $-1 < f(1) + g(0) < 1$ (3)

$x = y = 1$. Avem $-1 < f(1) + g(1) - 4 < 1$ (4)

Înmulțim inegalitățile (2) și (3) cu -1.
Obținem : $-1 < -f(0) - g(1) < 1$ (3') și

$$-1 < -f(1) - g(0) < 1 \quad (4')$$

Adunînd (1), (2'), (3') și (4) obținem :

$$-4 < -4 < 4, \text{ fals.}$$

Rezultă că presupunerea este falsă.
Deci există $x, y \in [0, 1]$ astfel încît :

$$|f(x) + g(y) - 4x^2y| \geqslant 1.$$

62. Avem următoarele condiții :

$3x - 1 \in \{2, 3, 4, 5, \ldots\}$ (1)

$8 - 3x \in \{2, 3, 4, 5, \ldots\}$ (2)

$5x \in \{2, 3, 4, 5 \ldots\}$ (3)

Scanned with OKEN Scanner

$$(1) \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}, \ldots\right\}$$

$$(2) \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{6}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{3}{3}, \ldots\right\}$$

$$(3) \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{5}, \ldots\right\}.$$

Cele trei condiții conduc la $x \in \{1, 2\}$.
Înlocuind în ecuația dată:

a) $x = 1$ Obținem $\sqrt{\sqrt[5]{-1}} = \sqrt[5]{2}$, imposibil

b) $x = 2$ Obținem $\sqrt[5]{\sqrt{4}} = \sqrt[10]{4}$, adevărat.

Deci, $x = 2$ este soluția ecuației.

63. Presupunem că există b_1, b_2, b_3, b_4 distincte astfel încît:

$$f(b_1) = 1,\ f(b_2) = 1,\ f(b_3) = 1,\ f(b_4) = 1.$$

Fie $g(x) = f(x) - 1$. Atunci:

$$g(b_1) = f(b_1) - 1 = 0,\ g(b_2) = 0,\ g(b_3) = 0,\ g(b_4) = 0,$$

deci g se divide cu $x - b_1$, $x - b_2$, $x - b_3$, $x - b_4$.
Acestea fiind polinoame prime două cîte două avem:

$$g \vdots (x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)(x - b_4).$$

Atunci: $g(x) = (x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)(x - b_4) \cdot h(x)$
de unde $f(x) = (x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)(x - b_4) \cdot h(x) + 1$.
Presupunem că $(\exists)\ a \in \mathbf{Z}$ astfel încît $f(a) = -1$. Atunci

$$-1 = (a - b_1)(a - b_2)(a - b_3)(a - b_4)h(a) + 1,$$

adică $(a - b_1)(a - b_2)(a - b_3)(a - b_4)h(a) = -2$.
Egalitatea este imposibilă deoarece $a - b_1$, $a - b_2$, $a - b_3$, $a - b_4$ sînt numere întregi distincte două cîte două.
Rezultă că presupunerea făcută este falsă.

64. A treia ecuație a sistemului implică $z(xy + 1) = 0$ de unde $z = 0$ sau $xy = -1$.

I) $z = 0 \qquad 2x + y = 0 \qquad xy = y$.

Ecuația a treia a sistemului (I) se scrie $y(x - 1) = 0$ de unde $y = 0$ sau $x = 1$.

$$I_1) \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$I_2) \begin{cases} z = 0 \\ x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$II) \begin{cases} xy = -1 \\ 2x + y + z = 0 \\ xy + yz + zx = y \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din a doua ecuație a sistemului (II) avem $z = -2x - y$.
Înlocuim în a treia ecuație:

$$xy + y(-2x - y) + x(-2x - y) = y.$$

Obținem sistemul $\begin{cases} 2 - y^2 - 2x^2 - y = 0 \\ xy = -1 \end{cases}$

Înlocuim în prima ecuație $y = -\frac{1}{x}$.

Avem $2 - \frac{1}{x^2} - 2x^2 + \frac{1}{x} = 0$

de unde avem $2x^4 - 2x^2 - x + 1 = 0$.
Observăm că $x_1 = 1$ este soluție.
Împărțind cu schema lui Horner obținem ecuația de gradul al III-lea

$$2x^3 + 2x^2 - 1 = 0$$

Notăm: $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 1$

$$f'(x) = 6x^2 + 4x$$

$f'(x) = 0$ are rădăcinile $x = 0$, $x = -\frac{2}{3}$.

Întocmim șirul lui Rolle:

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$-\frac{19}{27}$	-1	$+\infty$

Obținem $x_2 \in (0, +\infty)$ și $x_3, x_4 \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$.
$f(0) = -1$, $f(1) = 3$ deci $x_2 \in (0, 1)$ și este o rădăcină irațională.
Obținem soluțiile:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} x = \alpha \\ y = -\frac{1}{\alpha} \\ z = -2\alpha + \frac{1}{\alpha} \end{cases}$$

unde $\alpha = x_2 \in (0, 1)$, număr irațional.

5. Egalitatea $(xy)^4 = x^4y^4$ o scriem $(xy)(xy)^3 = x^4y^4$.
Înmulțind la stînga cu x^{-1} obținem $y(xy)^3 = x^3y^4$ sau $y(x^3y^3) = x^3y^3$.
Înmulțind la dreapta cu $(y^3)^{-1}$ obținem $yx^3 = x^3y$, deci y comută cu x^3.
Înmulțim la dreapta cu x^3 și obținem $y(x^3)^2 = x^3yx^3$.
Dar $x^3yx^3 = x^3x^3xy = (x^3)^2y$.
Deci $y(x^3)^2 \quad (x^3)^2y$.
Presupunem că $y(x^3)^k = (x^3)^ky$, unde $k \in \mathbf{N}^*$.
Înmulțim la dreapta cu x^3 și obținem:

$$y(x^3)^{k+1} = (x^3)^kyx^3. \text{ Dar } yx^3 = x^3y \text{ și deci}$$

$$y(x^3)^{k+1} = (x^3)^{k+1}y.$$

Scanned with OKEN Scanner

Am demonstrat prin inducție matematică egalitatea :

$$yx^{3n} = x^{3n}y, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^* \text{ și } (\forall)\ x, y \in G.$$

Egalitatea $(xy)^5 = x^5y^5$ o scriem :

$$(xy)(xy)^4 = x^5y^5 \text{ sau } xy(x^4y^4) = x^5y^5.$$

Înmulțim la stînga cu x^{-1} și la dreapta cu $(y^4)^{-1}$ și obținem :

$$yx^4 = x^4y$$

Prin inducție matematică se demonstrează ca mai sus egalitatea :

$$yx^{4p} = x^{4p}y, \ (\forall)\ p \in \mathbf{N}^*, \ (\forall)\ x, y \in G.$$

Deoarece numerele 3 și 4 sînt prime între ele, există $n, p \in \mathbf{Z}$ astfel încît

$$3n + 4p = 1.$$

Atunci $xy = x^{3n+4p}y = x^{3n}(x^{4p}y) = x^{3n}(yx^{4p}) = (x^{3n}y)x^{4p} =$

$$= (yx^{3n})x^{4p} = y(x^{3n}x^{4p}) = yx^{3n+4p} = yx,$$

deci $xy = yx$, $(\forall)\ x, y \in G$, adică grupul $(G, \cdot)$ este abelian.

XIV

66. Prin înlocuirea $y = 0$ obținem $f(x) \cdot f(0) = f(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Funcția fiind neidentic nulă, există $x_0 \in \mathbf{R}$ astfel încît $f(x_0) \neq 0$.

Înlocuind x cu x_0 obținem :

$f(x_0) \cdot f(0) = f(x_0)$, de unde prin împărțire cu $f(x_0)$ obținem $f(0) = 1$.

Prin înlocuirea $y = x$ obținem :

$$f^2(x) = f(0), \text{ adică } f^2(x) = 1.$$

Prin înlocuirea $y = \frac{x}{2}$ obținem :

$$f(x) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right).$$

Cum $f^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1$ rezultă $f\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$.

Împărțim cu $f\left(\frac{x}{2}\right)$ și obținem $f(x) = 1$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

67. Demonstrăm prin inducție matematică propoziția :

$$P(n) : x_1 \geqslant 0, \ \ldots, \ x_n \geqslant 0, \ x_1 + \ldots + x_n \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow (1 - x_1)\ldots(1 - x_n) \geqslant \frac{1}{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $n = 1$ avem:

$$P(1): x_1 \geqslant 0,\ x_1 \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - x_1 \geqslant \frac{1}{2},\ \text{adevărat.}$$

Presupunem $P(k)$ adevărat, unde:

$$P(k): x_1 \geqslant 0, \ldots, x_k \geqslant 0,\ x_1 + \ldots + x_k \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 - x_1)\ldots(1 - x_k) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Demonstrăm implicația $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ unde

$$P(k+1): x_1 \geqslant 0, \ldots, x_{k+1} \geqslant 0,\ x_1 + \ldots + x_{k+1} \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 - x_1)\ldots(1 - x_{k+1}) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Notăm $x_1' = x_1, \ldots, x_{k-1}' = x_{k-1}, x_k' = x_k + x_{k+1}$.
Cu aceste notații avem:

$$x_1' \geqslant 0, \ldots, x_{k-1}' \geqslant 0, x_k' \geqslant 0 \quad \text{și}$$

$$x_1' + \ldots + x_{k-1}' + x_k' = x_1 + \ldots + x_{k-1} + x_k + x_{k+1} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Conform ipotezei de inducție avem:

$$(1 - x_1')\ldots(1 - x_{k-1}')(1 - x_k') \geqslant \frac{1}{2}$$

de unde $(1 - x_1)\ldots(1 - x_{k-1})(1 - x_k - x_{k+1}) \geqslant \frac{1}{2}$. (1)

Demonstrăm inegalitatea:

$$(1 - x_1)\ldots(1 - x_{k-1})(1 - x_k)(1 - x_{k+1}) \geqslant (1 - x_1)\ldots$$
$$\ldots(1 - x_{k-1})(1 - x_k - x_{k+1}) \qquad (2)$$

$(2) \Leftrightarrow (1 - x_k)(1 - x_{k+1}) \geqslant (1 - x_k - x_{k+1} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1 - x_k - x_{k+1} + x_k x_{k+1} \geqslant 1 - x_n - x_{k+1}$, adevărată.
Deci (2) adevărată.

(1), (2) $\Rightarrow (1 - x_1)\ldots(1 - x_{k+1}) \geqslant \frac{1}{2}$, adică $P(k+1)$ este adevărată.

68. În egalitatea dată facem înlocuirea $x = 0$. Obținem:

$$0 = -10P(0), \text{ de unde } P(0) = 0, \text{ adică } P : X.$$

Pentru $X = 1$ avem $P(0) = -9P(1)$, de unde $P(1) = 0$, adică $P \vdots (X - 1)$.
Pentru $X = 2, \ldots, X = 9$, obținem asemănător că P se divide cu $X - 2$, $X - 3, \ldots, X - 9$.
Polinoamele $X, X - 1, \ldots, X - 9$ sînt prime două cîte două.

Scanned with OKEN Scanner

De aici rezultă că $P : X(X-1), \ldots, (X-9)$, deci

$$P = X(X-1)\ldots(X-9)\cdot Q.$$

Înlocuind P în egalitatea dată obținem:
$X(X-1)\ldots(X-10)Q(X-1) = (X-10)X\ldots(X-9)Q(X)$, egalitate adevărată pentru toate valorile reale ale nedeterminatei X. De aici avem egalitatea:

$Q(X-1) = Q(X)$, adevărată pentru orice valoare a nedeterminatei X în mulțimea

$$\mathbf{R} - \{0, 1, \ldots, 10\}.$$

Obținem: $Q(X) = k$, deci

$$P(X) = kX(X-1)\ldots(X-9).$$

69. Notăm:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Atunci: $A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}+a_n & \frac{1}{3}+\frac{a_n}{2}+b_n \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}+a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dar $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & a_{n+1} & b_{n+1} \\ 0 & 1 & a_{n+1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Obținem $a_{n+1} = \frac{1}{2} + a_n$, $b_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{a_n}{2} + b_n$,

unde $a_1 = \frac{1}{2}$, $b_1 = \frac{1}{3}$.

Șirul (a_n) este o progresie aritmetică avînd rația $\frac{1}{2}$. Atunci

$$a_n = a_1 + (n-1)r = \frac{1}{2} + (n-1)\frac{1}{2} = \frac{n}{2}.$$

Atunci $b_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{n}{4} + b_n$.

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind succesiv n cu 1, 2, ..., $n-1$ obținem :

$$b_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + b_1$$

$$b_3 = \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + b_2$$

. . . . . .

$$b_n = \frac{1}{3} + \frac{n-1}{4} + b_{n-1}.$$

Adunînd egalitățile obținem :

$$b_n = \frac{n-1}{3} + \frac{1+2+\ldots+(n-1)}{4} + b_1 = \frac{n-1}{3} + \frac{n(n-1)}{8} +$$

$$+ \frac{1}{3} = \frac{n}{3} + \frac{n(n-1)}{8}$$

Deci :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & \frac{n}{3} + \frac{n(n-1)}{8} \\ 0 & 1 & \frac{n}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Metoda a doua. Matricea A se poate scrie sub forma :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U + B,$$

unde U este matricea unitate, iar

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Atunci $A^n = (U+B)^n$.
Deoarece $U \cdot B = B \cdot U = B$, putem aplica binomul lui Newton.

$$A^n = U^n + C_n^1 U^{n-1} B + C_n^2 U^{n-2} B^2 + \ldots + B^n.$$

Avem $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

$$B^3 = B^2 \cdot B = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci $B^k = 0$, $(\forall)\ k \geqslant 3$.

Atunci :

$$A^n = U + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{n}{2} & \frac{n}{3} \\ 0 & 0 & \frac{n}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{n(n-1)}{8} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & \frac{n}{3} + \frac{n(n-1)}{8} \\ 0 & 1 & \frac{n}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

70. Fie $e \in G$ elementul neutru al grupului G. Arătăm că $(\forall)\ x \in G - \{e\}$ avem $x \neq x^{-1}$.

Presupunem că $(\exists)\ x \in G - \{e\}$ astfel încît $x = x^{-1}$. Înmulțind egalitatea cu x obținem $x^2 = e$ cu $x \neq e$. Dar $x^2 = f(x)$ și $e = f(e)$, deci $f(x) = f(e)$.

f fiind funcție injectivă avem $x = e$, fals.

Rezultă presupunere falsă.

Deci $(\forall)\ x \in G - \{e\}$ avem $x \neq x^{-1}$.

Grupăm elementele mulțimii $G - \{e\}$ în perechi formate din cîte un element al mulțimii și inversul său. Deci $G - \{e\}$ are un număr par de elemente și atunci G are un număr impar de elemente.

XV

71. Presupunem că mulțimile A și B nu sînt disjuncte.

Atunci există $n, k \in \mathbf{N}$ astfel încît

$$\frac{2n+1}{2n-3} = \frac{3k+1}{3k-2}, \text{ de unde avem succesiv}$$

$$6nk - 4n + 3k - 2 = 6nk + 2n - 9k - 3,$$

$$12k - 6n = -1,$$

egalitate imposibilă deoarece $12k - 6n$ este un număr par iar -1 este impar.

Rezultă că presupunerea făcută este falsă, deci A și B sînt disjuncte.

72. Pentru $a, b, c \in \left(-\frac{1}{4}, +\infty\right)$ avem $4a + 1 > 0$, $4b + 1 > 0$, $4c + 1 > 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Aplicăm inegalitatea dintre media geometrică și aritmetică.

$$\sqrt{(4a+1)\cdot 1} \leqslant \frac{4a+1+1}{2}, \text{ adică}$$

$$\sqrt{4a+1} \leqslant 2a+1.$$

Analog $\sqrt{4b+1} \leqslant 2b+1$ și

$$\sqrt{4c+1} \leqslant 2c+1.$$

Adunînd obținem:

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} \leqslant 2(a+b+c)+3.$$

Dar $a+b+c=1$. Înlocuind se obține inegalitatea cerută.

73. Fie x_1, x_2 rădăcinile polinomului $g = x^2 - x + 1$. Atunci

$$x_1^2 - x_1 + 1 = 0,\ x_2^2 - x_2 + 1 = 0 \text{ și } x_1^3 = -1,\ x_2^3 = -1.$$

Pentru $k \in \{1, 2\}$ avem:

$$f(x_k) = (x_k - 1)^m - x_k^m + 1 = (x_k^2)^m - x_k^m + 1 = x_k^{2m} - x_k^m + 1.$$

I) $m = 3p$

$$f(x_k) = x_k^{6p} - x_k^{3p} + 1 = (x_k^3)^{2p} - (x_k^3)^p + 1 =$$
$$= (-1)^{2p} - (-1)^p + 1 = 1 - (-1)^p + 1 \neq 0.$$

II) $m = 3p + 1$

$$f(x_k) = x_k^{6p+2} - x_k^{3p+1} + 1 = (x_k^3)^{2p}\cdot x_k^2 - (x_k^3)^p \cdot x_k + 1 =$$
$$= (-1)^{2p}\cdot x_k^2 - (-1)^p \cdot x_k + 1 = x_k^2 - (-1)^p \cdot x_k + 1.$$

$f(x_k) = 0$ dacă $p = 2$ de unde $m = 6q + 1$.

În această situație avem $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 0$, deci f se divide cu $X - x_1$ și cu $X - x_2$ și deoarece $X - x_1$ și $X - x_2$ sînt prime între ele rezultă că f se divide și cu $(X - x_1)(X - x_2)$ adică f se divide cu g.

III) $m = 3p + 2$

$$f(x_k) = x_k^{6p+4} - x_k^{3p+2} + 1 = (x_k^3)^{2p}\cdot x_k^3 \cdot x_k - (x_k^3)^p \cdot x_k^2 +$$
$$+ 1 = -x_k - (-1)^p \cdot x_k^2 + 1.$$

$f(x_k) = 0$ dacă $p = 2q + 1$ de unde $m = 6q + 5$.

Și în această situație avem f se divide cu g.

74. Avem $\det(U + AB) = \det(AA^{-1} + ABAA^{-1}) = \det[A(U + BA)A^{-1}] = \det A \cdot \det(U + BA) \cdot \det A^{-1}$.

Dar $AA^{-1} = U$ implică $\det(AA^{-1}) = \det U$, de unde $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$.

Atunci $\det(U + AB) = \det(U + BA)$.

75. Avem $(x+1)^2 = (x+1)(x+1) = x^2 + x + x + 1 = x^2 + 1$, deoarece $1 + 1 = 0$ conduce la $x(1 + 1) = 0$, adică $x + x = 0$, $(\forall)\ x \in A$.

$(x+1)^3 = (x+1)^2(x+1) = (x^2+1)(x+1) = x^3 + x^2 + x + 1$.

Scanned with OKEN Scanner

$(x+1)^4 = (x+1)^2(x+1)^2 = (x^2+1)(x^2+1) = x^4 + x^2 + x^2 + 1 =$

$= x^4 + 1.$

$(x+1)^5 = (x+1)^4(x+1) = (x^4+1)(x+1) = x^5 + x^4 + x + 1.$

b) Pentru $x = -1$ avem $(-1)^{n+1} = (-1)^n$ de unde $1 = -1$, adică $1 + 1 = 0$.

De aici avem $x(1+1) = 0$ și deci $x + x = 0$, $(\forall)\ x \in A$.

Demonstrăm prin inducție matematică egalitatea:

$$x^{n+p} = x^n,\ (\forall)\ x \in A \text{ și } (\forall)\ k \in \mathbf{N}.$$

Pentru $k = 0$ și $k = 1$ egalitatea este evidentă.

Presupunem adevărată egalitatea pentru $k = p$, adică

$$x^{n+p} = x^n,\ (\forall)\ x \in A.$$

Demonstrăm egalitatea pentru $k = p + 1$.

$$x^{n+p+1} = x^{n+p} \cdot x = x^n \cdot x = x^{n+1} = x^n.$$

Deci $x^{n+k} = x^n$, $(\forall)\ x \in A$, $(\forall)\ k \in \mathbf{N}$.

Din ipoteză avem $x^{n+1} = x^n$, $(\forall)\ x \in A$.

Adunăm x^n și obținem:

$$x^{n+1} + x^n = x^n + x^n. \text{ Dar } x^n + x^n = 0.$$

Deci $x^{n+1} + x^n = 0$, de unde $x^n(x+1) = 0$.

Înlocuim x cu $x + 1$ și obținem:

$$(x+1)^n(x+1+1) = 0, \text{ adică}$$

$$(x+1)^n \cdot x = 0,\ (\forall)\ x \in A.$$

Deoarece $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$, aplicăm binomul lui Newton. Obținem:

$$(C_n^0 x^n \quad C_n^1 x^{n-1} + \ldots + C_n^{n-1} x + 1) \cdot x = 0$$

Înmulțim cu x^{n-2}:

$$C_n^0 \cdot x^{2n-1} + C_n^1 \cdot x^{2n-2} + \ldots + C_n^{n-1} \cdot x^n + x^{n-1} = 0.$$

Dar $x^{2n-1} = x^{2n-2} = \ldots = x^{n+1} = x^n$.

Rezultă $(C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1}) \cdot x^n + x^{n-1} = 0$.

Dar $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.

Obținem $(2^n - 1) \cdot x^n + x^{n-1} = 0$, adică

$$2^n \cdot x^n - x^n + x^{n-1} = 0$$

Cum $1 + 1 = 0$, obținem $x^n + x^n = 0$ și $2^n x^n = 0$.

De aici avem $x^n = x^{n-1}$.

Analog $x^{n-1} = x^{n-2}, \ldots, x^2 = x$.

Scanned with OKEN Scanner

76. Avem inegalitatea $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k^2-1}$ echivalentă cu:

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right).$$

Dăm lui k valorile 2, 3, ..., n și adunăm inegalitățile. Obținem:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Notînd $S = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$

avem $S < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

dar $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) < \frac{3}{4}$.

Deci $S < \frac{3}{4}$.

77. Formulele lui Viète sînt:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 & (1) \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = a & (2) \\ x_1x_2x_3 = -a & (3) \end{cases}$$

Observăm că $(x_1 - 1) + (x_2 - 2) + (x_3 - 3) = x_1 + x_2 + x_3 - 6 = 0$.
Notăm $x_1 - 1 = y$, $x_2 - 2 = z$, $x_3 - 3 = t$.
Avem $y + z + t = 0$, de unde $y + z = -t$
Ridicăm la cub egalitatea:

$y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 = -t^3$, de unde avem

$y^3 - z^3 + t^3 = -3yz(y + z)$, adică

$y^3 + z^3 + t^3 = 3yzt$.

Concomitent, obținem:

$(x_1 - 1)^3 + (x_2 - 2)^3 + (x_3 - 3)^3 = 3(x_1 - 1)(x_2 - 2)(x_3 - 3)$.
Dar $(x_1 - 1)^3 + (x_2 - 2)^3 + (x_3 - 3)^3 = 0$
Rezultă $(x_1 - 1)(x_2 - 2)(x_3 - 3) = 0$, de unde $x_1 = 1$ sau $x_2 = 2$ sau $x_3 = 3$.

I) Dacă $x_1 = 1$, atunci
din (1) avem $x_2 + x_3 = 5$
din (2) avem $x_2x_3 = a - 5$
din (3) avem $x_2x_3 = -a$

Scanned with OKEN Scanner

Deci $a - 5 = -a$, de unde $a = \frac{5}{2}$

Atunci $x_2 + x_3 = 5$ și $x_2x_3 = -\frac{5}{2}$

x_2 și x_3 sînt rădăcinile ecuației:

$$x^2 - 5x - \frac{5}{2} = 0.$$

Avem $x_2 = \frac{5 + \sqrt{35}}{2}$, $x_3 = \frac{5 - \sqrt{35}}{2}$.

II) Dacă $x_2 = 2$, atunci:

din (1) avem $x_1 + x_3 = 4$

din (2) avem $x_1x_3 = a - 8$

din (3) avem $x_1x_3 = -\frac{a}{2}$

Deci $a - 8 = -\frac{a}{2}$, de unde $a = \frac{16}{3}$.

Atunci $x_1 + x_3 = 4$, $x_1x_3 = -\frac{8}{3}$.

x_1 și x_3 sînt rădăcinile ecuației:

$$x^2 - 4x - \frac{8}{3} = 0, \text{ adică } 3x^2 - 12x - 8 = 0.$$

Avem: $x_1 = \frac{6 + 2\sqrt{15}}{3}$, $x_2 = \frac{6 - 2\sqrt{15}}{3}$.

III) Dacă $x_3 = 3$, atunci:

din (1) avem $x_1 + x_2 = 3$

din (2) avem $x_1x_2 = a - 9$

din (3) avem $x_1x_2 = -\frac{a}{3}$.

Deci $a - 9 = -\frac{a}{3}$, de unde $a = \frac{27}{4}$.

Atunci $x_1 + x_2 = 3$ și $x_1x_2 = -\frac{9}{4}$.

x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației:

$$x^2 - 3x - \frac{9}{4} = 0.$$

Avem: $x = \frac{3 + 3\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = \frac{3 - 3\sqrt{2}}{2}$.

78. Ridicăm (1) la pătrat. Obținem:

$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$

Ținînd seama de (2) obținem:

$xy + xz + yz = ab + ac + bc$ (4)

Scanned with OKEN Scanner

Cunoaștem identitatea

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$.

Înlocuind în (3) obținem:

$3xyz + (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) = 3abc +$

$+ (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$

de unde ținînd seamă de (1), (2), (4) obținem:

$$xyz = abc \tag{5}$$

Folosim identitatea:

$x^4 + y^4 + z^4 = (x + y + z)(x^3 + y^3 + z^3) - (xy + xz + yz)(x^2 + y^2 +$

$+ z^2) + xyz(x + y + z)$.

în care facem înlocuiri conform egalităților anterioare. Obținem:

$x^4 + y^4 + z^4 = (a + b + c)(a^3 + b^3 + c^3) - (ab + ac + bc) \cdot$

$\cdot(a^2 + b^2 + c^2) + abc(a + b + c) = a^4 + b^4 + c^4$.

Presupunem $x^n + y^n + z^n = a^n + b^n + c^n$
pentru orice $n \in \mathbf{N}$ astfel încît:

$$1 \leqslant n \leqslant k - 1.$$

Folosim identitatea:

$x^k + y^k + z^k = (x + y + z)(x^{k-1} + y^{k-1} + z^{k-1}) - (xy + xz + yz) \cdot$

$\cdot(x^{k-2} + y^{k-2} + z^{k-2}) + xyz(x^{k-3} + y^{k-3} + z^{k-3})$

în care facem înlocuiri conform ipotezei de inducție și egalităților (4) și (5). Obținem:

$x^k + y^k + z^k = (a + b + c)(a^{k-1} + b^{k-1} + c^{k-1}) - (ab + ac + bc) \cdot$

$\cdot(a^{k-2} + b^{k-2} + c^{k-2}) + abc(a^{k-3} + b^{k-3} + c^{k-3}) = a^k + b^k + c^k$.

Am demonstrat prin inducție matematică egalitatea:

$$x^n + y^n + z^n = a^n + b^n + c^n \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

79. Matricea sistemului este:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & a + b \\ a^2 & b^2 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}.$$

Determinantul matricei A este $d = ab(a - b)$.

I) $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$.

Atunci $d \neq 0$ și rezultă $r = m = n = 3$.

Scanned with OKEN Scanner

Sistemul este compatibil determinat și se rezolvă cu regula lui Cramer.

II) $a = 0,\ b \neq 0.$

Prin înlocuire sistemul devine:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ Ox + by + bz &= 1 \\ Ox + b^2y + b^2z &= 1 \end{aligned}$$

Matricea sistemului este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & b \\ 0 & b^2 & b^2 \end{pmatrix}$$

având $d = 0$.
Minorul principal este:

$$d_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b \end{vmatrix} = b \neq 0, \text{ deci } r = 2 \text{ și } m = n = 3$$

Minorul caracteristic este:

$$d_c = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & b^2 & 1 \end{vmatrix} = b(1 - b)$$

II_1) $a = 0,\ b \neq 0,\ b \neq 1$

Avem $d_c \neq 0$ deci (S) incompatibil.

II_2) $a = 0,\ b = 1.$

Avem $d_c = 0$ deci (S) va fi compatibil nedeterminat.
Rezolvăm sistemul ecuațiilor principale.

$$\begin{cases} x + y = 1 - z \\ Ox + by = 1 - bz \end{cases}$$

Înlocuim $b = 1$ avem

$$\begin{cases} x + y = 1 - z \\ y = 1 - z \end{cases}$$

Deci $x = 0$

$y = 1 - \lambda$ cu $\lambda \in \mathbf{R}$

$z = \lambda$

III) $b = 0,\ a \neq 0$
Rezolvare ca la (II).
IV) $a = b \neq 0$

Scanned with OKEN Scanner

Prin înlocuire sistemul devine :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + ay + 2az = 1 \\ a^2x + a^2y + 2a^2z = 1 \end{cases}$$

Matricea sistemului este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & 2a \\ a^2 & a^2 & 2a^2 \end{pmatrix}.$$

Avem $d = 0$.

Minorul principal este $d_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 2a \end{vmatrix} = a \neq 0$, deci $r = 2$.

Minorul caracteristic este :

$$d_c = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2a & 1 \\ a^2 & 2a^2 & 1 \end{vmatrix} = a(1 - a)$$

IV$_1$) $a = b \neq 0$, $a \neq 1$

Rezultă $d_c \neq 0$, deci (S) incompatibil.

IV$_2$) $a = b = 1$

Avem $d_c = 0$, deci (S) compatibil nedeterminat.
Rezolvăm sistemul ecuațiilor principale :

$$\begin{cases} y + z = 1 - x \\ ay + 2az = 1 - ax \end{cases}$$

Înlocuind a cu 1 sistemul devine :

$$\begin{cases} y + z = 1 - x \\ y + 2z = 1 - x \end{cases}$$

care duce la soluțiile :

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \text{ unde } \lambda \in \mathbf{R} \\ z = 0 \end{cases}$$

V) $a = b = 0$

Prin înlocuire sistemul devine :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 1 \\ 0x + 0y + 0z = 1 \end{cases}$$

sistem incompatibil.

Scanned with OKEN Scanner

80. a) *Exemplul 1*

$X = Y = 0$ și $a,\ b \in \mathbb{C}^*$ arbitrare.

Exemplul 2

$$X = Y = I_n,\ a = b = \frac{1}{2}.$$

b) Egalitatea $XY = aX + bY$ o scriem:

$$XY - aX - bY + abI_n = abI_n$$

pe care o transformăm succesiv.

$$X(Y - aI_n) - b(Y - aI_n) = abI_n \qquad (*)$$

$$(X - bI_n)(Y - aI_n) = abI_n$$

Atunci $\det(X - bI_n)(Y - aI_n) = \det(abI_n)$
de unde $\det(X - bI_n) \cdot \det(Y - aI_n) = (ab)^n \neq 0$.
Atunci $\det(X - bI_n) \neq 0$, adică matricea $X - bI_n$ este inversabilă.
Înmulțim egalitatea $(*)$ la stînga cu $(X - bI_n)^{-1}$. Obținem

$$Y - aI_n = ab(X - bI_n)^{-1}.$$

Înmulțind această egalitate, la dreapta cu $(X - bI_n)$ obținem:

$$(Y - aI_n)(X - bI_n) = abI_n, \text{ de unde avem succesiv.}$$

$$YX - bY - aX + abI_n = abI_n,$$

$$YX = aX + bY$$

Cum $XY = aX + bY$ obținem $XY = YX$, adică matricele X și Y comută.

XVII

81. Adunăm ecuațiile:

$$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) + a(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + n\left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = x_1 + x_2 +$$

$$+ \ldots + x_n \Leftrightarrow \left[x_1^2 + (a-1)x_1 + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2\right] + \left[x_2^2 + (a-1)x_2 + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2\right] +$$

$$+ \ldots + \left[x_n^2 + (a-1)x_n + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x_1 + \frac{a-1}{2}\right)^2 + \left(x_2 + \frac{a-1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(x_n + \frac{a-1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{1-a}{2}.$$

Observăm că valorile găsite verifică ecuațiile sistemului.

Scanned with OKEN Scanner

82. Presupunem că numerele $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ sînt termeni ai aceleiași progresii aritmetice de rație r.

Atunci $\sqrt{5} = \sqrt{2} + mr$,
$\sqrt{7} = \sqrt{5} + nr$
cu $m, n \in \mathbf{N}$.

Rezultă $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} = \frac{m}{n}$

de unde avem succesiv:

$$n\sqrt{5} - n\sqrt{2} = m\sqrt{7} - m\sqrt{5},$$

$$(n + m)\sqrt{5} = n\sqrt{2} + m\sqrt{7},$$

$$(n + m)^2 \cdot 5 = 2n^2 + 7m^2 + 2mn\sqrt{14},$$

$$\sqrt{14} = \frac{5(n + m)^2 - 2n^2 - 7m^2}{2mn},$$

egalitate imposibilă, deoarece $\sqrt{14} \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, iar fracția aparține mulțimii $\mathbf{Q}$. Rezultă că presupunerea făcută este falsă.

83. Ecuația dată are necunoscuta x și parametrul m.
Scriem ecuația sub forma:

$$m^2 - 3xm - (x^4 + x^3 - 2x^2) = 0,$$

deci ecuație de gradul al doilea în m.

$$\Delta = 9x^2 + 4(x^4 + x^3 - 2x^2) = 4x^4 + 4x^3 + x^2 = (2x^2 + x)^2.$$

Ecuația în m are rădăcinile $m_1 = x^2 + 2x$, $m_2 = -x^2 + x$.
Ecuația dată se descompune în două ecuații:

I) $x^2 + 2x - m = 0$

II) $x^2 - x + m = 0$

Rădăcinile ecuației date sînt reale, dacă și numai dacă

$\Delta_1 \geqslant 0$, $\Delta_2 \geqslant 0$, care echivalează cu

$$\begin{cases} 1 + m \geqslant 0 \\ 1 - 4m \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left[-1, \frac{1}{4}\right].$$

În această situație:

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + }$$

$$x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4m}}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

84. Matricea sistemului este:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

Determinantul matricei A este:

$$d = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a + b\varepsilon + c\varepsilon^2)(a + b\varepsilon^2 + c\varepsilon),$$

unde ε este rădăcină de ordinul trei a unității, $\varepsilon \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$, ε verifică egalitățile $\varepsilon^3 = 1$ și $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$.

I) Dacă $d \neq 0$ atunci sistemul (S) are rangul 3, egal cu numărul n al ecuațiilor și cu numărul m al necunoscutelor. Sistemul (S) este compatibil determinat și se rezolvă cu regula lui Cramer.
II) Dacă $d = 0$ sistemul are rangul $r \leqslant 2$.
Atunci $a + b + c = 0$ sau $a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 = 0$ sau $a + b\varepsilon^2 + c\varepsilon = 0$.
$a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 = 0$ implică $a + b\varepsilon + c(-\varepsilon - 1) = 0$ de unde avem

$$a - c + \varepsilon(b - c) = 0.$$

Presupunem $b - c \neq 0$. Atunci $\varepsilon = \frac{c - a}{b - c}$, egalitate falsă deoarece $\varepsilon \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$ iar $\frac{c - a}{b - c} \in \mathbf{R}$. Rezultă că presupunerea făcută este falsă.
Deci $b - c = 0$, adică $b = c$ și $a = c$, deci $a = b = c$.
Analog $a + b\varepsilon^2 + c\varepsilon = 0$ implică $a = b = c$.
Deci $\alpha = 0$ implică $a + b + c = 0$ sau $a = b = c$.

II_1) $a = b = c \neq 0$ sistemul (S) se reduce la o singură ecuație $ax + ay + az = 1$ de unde $x + y + z = \frac{1}{a}$.

Sistemul este compatibil nedeterminat avînd mulțimea soluțiilor:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{a} - \lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \qquad \text{unde } \lambda, \mu \in \mathbf{R}.$$

II_2) Dacă $a = b = c = 0$
Fiecare ecuație duce la $0 = 1$, fals.
Deci (S) incompatibil.

II_3) Dacă $a + b + c = 0$ astfel încît să nu avem $a = b = c$ adunăm ecuațiile și obținem:

$$(a + b + c)(x + y + z) = 3 \text{ de unde } 0 = 3, \text{ fals.}$$

Deci (S) incompatibil.

Scanned with OKEN Scanner

85. Înmulțim ecuația a doua cu $\hat{3}$, care este element inversabil al inelului. Obținem $x + \hat{5}y = \hat{2}$ pe care o scădem din prima ecuație a sistemului. Obținem :

$$x = \hat{0}$$

Atunci $\hat{5}y = \hat{2}$, de unde $y = \hat{2}$.
Unica soluție a sistemului este $x = \hat{0}$, $y = \hat{2}$.

XVIII

86. Notăm $\alpha = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$, $\beta = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2$. Problema dată echivalează cu :

$$\alpha^2 \geqslant 3\beta \Rightarrow (\alpha - x - y)^2 \geqslant \beta - x^2 - y^2, \ (\forall)\ x, y \in \mathbf{R}.$$

$$(\alpha - x - y)^2 \geqslant \beta - x^2 - y^2, \ (\forall)\ x, y \in \mathbf{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\alpha y + 2xy \geqslant \beta - x^2 - y^2, \ (\forall)\ x, y \in \mathbf{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2(y - \alpha)x + (2y^2 - 2\alpha y + \alpha^2 - \beta) \geqslant 0, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R},$$

$$\text{unde } y \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \Delta_y \leqslant 0, \ (\forall)\ y \in \mathbf{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y - \alpha)^2 - 2(2y^2 - 2\alpha y + \alpha^2 - \beta) \leqslant 0, \ (\forall)\ y \in \mathbf{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2\alpha y + \alpha^2 - 4y^2 + 4\alpha y - 2\alpha^2 + 2\beta = 0, \ (\forall)\ y \in \mathbf{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3y^2 + 2\alpha y - \alpha^2 + 2\beta \leqslant 0, \ (\forall)\ y \in \mathbf{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta_y \leqslant 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + 3(-\alpha^2 + 2\beta) \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\alpha^2 + 6\beta \geqslant 0 \Leftrightarrow \alpha^2 \geqslant 3\beta,$$

adevărat, ipoteza.

87. a) Funcția f se scrie sub forma echivalentă :

$$f(x) = 10a^2x - 2a(a_1 + a_2 + \ldots + a_{10})x + (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{10}^2).$$

$$\Delta = 4a^2(a_1 + a_2 + \ldots + a_{10})^2 - 40a^2(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{10}^2)$$

$$= 4a^2[(a_1 + a_2 + \ldots + a_{10})^2 - 10(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{10}^2)].$$

$$f_{min} = -\frac{4a^2(a_1 + \ldots a_{10})^2 - 10(a_1^2 + \ldots + a_{10}^2)}{40a^2} = -$$

$$-\frac{(a_1 + \ldots + a_{10})^2 - 10(a_1^2 + \ldots + a_{10}^2)}{10}.$$

Observăm că f_{min} nu depinde de a.
b) Pentru orice $x \in \mathbf{R}$, $f(x)$ este sumă de pătrate de numere reale, deci $f(x) \geqslant 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

Atunci $f_{min} \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (a_1 + a_2 + \ldots + a_{10})^2 - 10(a_1^2 + \ldots + a_{10}^2) \leqslant 0.$$

Dar $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{10}^2 = 1$, deci

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{10})^2 \leqslant 10, \text{ de unde}$$

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_{10}| \leqslant \sqrt{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{10} \leqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} \leqslant \sqrt{10}.$$

88. Aplicăm inegalitatea Cauchy-Buniakowski grupelor de numere:

$$P\left(\frac{x_1}{x_2}\right), P\left(\frac{x_2}{x_3}\right), \ldots, P\left(\frac{x_n}{x_1}\right) \text{ și } 1, 1, \ldots, 1.$$

$$\left[P^2\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + P^2\left(\frac{x_2}{x_3}\right) + \ldots + P^2\left(\frac{x_n}{x_1}\right)\right] \cdot (1 + 1 + \ldots + 1) \geqslant$$

$$\geqslant \left[P\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + P\left(\frac{x_2}{x_3}\right) + \ldots + P\left(\frac{x_n}{x_1}\right)\right]^2 \qquad (*)$$

Fie $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$.

$$P\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + P\left(\frac{x_2}{x_3}\right) + \ldots + P\left(\frac{x_n}{x_1}\right) =$$

$$= \left[a_0\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n + a_1\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + a_n\right] +$$

$$+ \left[a_0\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n + a_1\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\left(\frac{x_2}{x_3}\right) + a_n\right] +$$

$$+ \ldots + \left[a_0\left(\frac{x_n}{x_1}\right)^n + a_1\left(\frac{x_n}{x_1}\right)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\left(\frac{x_n}{x_1}\right) + a_n\right] =$$

$$= a_0\left[\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n + \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n + \ldots + \left(\frac{x_n}{x_1}\right)^n\right] + a_1\left[\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{n-1} + \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^{n-1} +\right.$$

$$\left. + \ldots + \left(\frac{x_n}{x_1}\right)^{n-1}\right] + \ldots + a_{n-1}\left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_n}{x_1}\right) + na_n.$$

Dar aplicînd, inegalitatea mediilor avem

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_n}{x_1} \geqslant n, \ldots,$$

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n + \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n + \ldots + \left(\frac{x_n}{x_1}\right)^n \geqslant n.$$

Atunci

$$P\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + P\left(\frac{x_2}{x_3}\right) + \ldots + P\left(\frac{x_n}{x_1}\right) \geqslant na_0 + na_1 + \ldots + na_n = nP(1).$$

Scanned with OKEN Scanner

Ridicînd la pătrat avem:

$$\left[P\left(\frac{x_1}{x_2}\right)+P\left(\frac{x_2}{x_3}\right)+\ldots+\left(\frac{x_n}{x_1}\right)\right]^2 \geqslant n^2P^2 \ (1) \qquad (**)$$

Din inegalitățile (*) și (**) rezultă:

$$n\left[P^2\left(\frac{x_1}{x_2}\right)+P^2\left(\frac{x_2}{x_3}\right)+\ldots+P^2\left(\frac{x_n}{x_1}\right)\right] \geqslant n^2P^2 \ (1),$$

de unde avem:

$$P^2\left(\frac{x_1}{x_2}\right)+P^2\left(\frac{x_2}{x_3}\right)+\ldots+P^2\left(\frac{x_n}{x_1}\right) \geqslant nP^2 \ (1).$$

89. Fie determinantul

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Avem $a_{11}=a_{22}=a_{33}=\frac{1}{2}$.

Notăm $a_{12}=x$. Atunci $a_{13}=\frac{1}{2}-x$, $a_{23}=x$, $a_{21}=\frac{1}{2}-x$, $a_{31}=x$,

$$a_{32}=\frac{1}{2}-x.$$

Deci

$$d=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & x & \frac{1}{2}-x \\ \frac{1}{2}-x & \frac{1}{2} & x \\ x & \frac{1}{2}-x & \frac{1}{2} \end{vmatrix}.$$

Folosind regula triunghiurilor avem:

$$d=3x^2-\frac{3x}{2}+\frac{1}{4}=f(x).$$

Deoarece $\Delta=\frac{9}{4}-3=-\frac{3}{4}<0$ avem $f(x)>0$,

$(\forall)\ x\in\mathbf{R}$, deci $d>0$.

90. Se împarte polinomul f la polinomul $\hat{5}g$, obținîndu-se cîtul $x^2+\hat{6}x$ și restul $x+\hat{3}$.

Împărțim polinomul $x^2+\hat{5}$ la $x+\hat{3}$, obținîndu-se cîtul $x+\hat{4}$ și ca rest polinomul nul.

Rezultă că cel mai mare divizor comun al polinoamelor f și g este polinomul $x+\hat{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

XIX

91. Presupunem că există o funcție f injectivă verificînd inegalitatea dată.
Observăm că $x^2 = x$ dacă și numai dacă $x = 0$ sau $x = 1$.
Înlocuim în inegalitate x cu 0.
Obținem succesiv:

$$f(0) - f^2(0) \geqslant \frac{1}{4},$$

$$4f(0) - 4f^2(0) \geqslant 1,$$

$$4f^2(0) - 4f(0) + 1 \leqslant 0,$$

$$(2f(0) - 1) \leqslant^2 0$$

de unde $2f(0) - 1 = 0$, adică $f(0) = \frac{1}{2}$.

Înlocuind în inegalitate x cu 1 și prelucrînd asemănător obținem $f(1) = \frac{1}{2}$, în contradicție cu proprietatea de injectivitate a funcției f.

92. Observăm că $x = 0$ este soluție a ecuației date.
Demonstrăm unicitatea soluției.
Notăm $f(x) = \log_2(x+1) + \log_3(x+1) + \ldots + \log_n(x+1) + \log_n(x+1) + (n-1)$
f este o funcție strict crescătoare, ca sumă de funcții strict crescătoare.

$$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x + \ldots + \left(\frac{1}{n}\right)^x$$

g este o funcție strict descrescătoare ca sumă de funcții strict descrescătoare.
Deoarece $x = 0$ este soluție a ecuației avem $f(0) = g(0)$ (1)
Presupunem că ecuația are o soluție $x' < 0$. Atunci

$$f(x') < f(0) \tag{2}$$

și

$$g(x') > g(0) \tag{3}$$

Din (1), (2) și (3) rezultă:
$f(x') < f(0) = g(0) < g(x')$, deci
$f(x') \neq g(x')$, în contradicție cu presupunerea că x' este soluție.
Analog, presupunînd că ecuația are o soluție $x'' > 0$ ajungem la contradicție.
Deci $x = 0$ este unica soluție a ecuației.

93. Din ipoteză rezultă că:

$$2 + \sigma(2) - 1 - \sigma(1) = 3 + \sigma(3) - 2 - \sigma(2) =$$
$$= \ldots = n + \sigma(n) - (n-1) - \sigma(n-1) = r.$$

Analizăm următoarele situații:
I) $r > 0$.
Atunci $1 + \sigma(k) - \sigma(k-1) > 0$
pentru $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$, de unde $1 + \sigma(k) > \sigma(k-1)$.
Atunci $\sigma(k) \geqslant \sigma(k-1)$.

Scanned with OKEN Scanner

Dar $\sigma(k) \neq \sigma(k-1)$, deci $\sigma(k) > \sigma(k-1)$ pentru $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$. Deci

$$\sigma(n) > \sigma(n-1) > \ldots > \sigma(2)$$

Rezultă permutarea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$$

care verifică condiția din enunț.

II) $r = 0$.
Atunci $1 + \sigma(k) = \sigma(k-1)$, deci

$$\sigma(k) < \sigma(k-1) \text{ pentru } k \in \{2, 3, \ldots, n\}.$$

Obținem $\sigma(n) < \sigma(n-1) < \ldots < \sigma(1)$.
Rezultă permutarea:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ n & n-1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

care verifică condiția din enunț.

III) $r < 0$.
Atunci $1 + \sigma(k) < \sigma(k-1)$.
Cum $\sigma(k) < 1 + \sigma(k)$, rezultă $\sigma(k) < \sigma(k-1)$ care conduce la permutarea:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ n & n-1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Succesiunea din enunț devine $n+1, n+1, \ldots, n+1$ pentru care nu avem $r < 0$.
Problema are ca soluții permutările:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix} \text{ și } \sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ n & n-1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

94. Avem succesiv:

$(xy)^2 = (xy)(xy) = (y^4x)(xy) = y^4x^2y = y^4ey = y^5$;
$(xy)^3 = (xy)(xy)^2 = (xy)y^5 = xy^6 = xe = x$;
$(xy)^6 = [(xy)^2]^3 = (y^5)^3 = y^{15} = y^6y^6y^3 = e \cdot e \cdot y^3 = y^3$;
$(xy)^6 = [(xy)^3]^2 = x^2 = e$.
De aici avem $y^3 = e$.
Din $xy = y^4x$ obținem $xy = y^3(yx)$
sau $xy = e(yx)$, deci $xy = yx$.

95. $\bar{f} = \bar{g}$ implică $f(\alpha) = g(\alpha)$, $(\forall)\ \alpha \in \mathbf{Z}_6$.
Fie $g = \hat{a}x^3 + \hat{b}x^2 + \hat{c}x + \hat{d} \in \mathbf{Z}_6[X]$

Avem $f(\hat{0}) = \hat{1}$, $f(\hat{1}) = \hat{5}$, $f(\hat{2}) = \hat{1}$, $f(\hat{3}) = \hat{1}$, $f(\hat{4}) = \hat{5}$, $f(\hat{5}) = 1$

$g(\hat{0}) = \hat{d}$, $g(\hat{1}) = \hat{a} + \hat{b} + \hat{c} + \hat{d}$

Scanned with OKEN Scanner

$g(\hat{2}) = \hat{2}\hat{a} + \hat{4}\hat{b} + \hat{2}\hat{c} + \hat{d}$

$g(\hat{3}) = \hat{3}\hat{a} + \hat{3}\hat{b} + \hat{3}\hat{c} + \hat{d}$

$g(\hat{4}) = \hat{4}\hat{a} + \hat{4}\hat{b} + \hat{4}\hat{c} + \hat{d}$

$g(\hat{5}) = \hat{5}\hat{a} + \hat{b} + \hat{5}\hat{c} + \hat{d}.$

Obținem sistemul:

$$\begin{cases} \hat{d} = \hat{1} & (1) \\ \hat{a} + \hat{b} + \hat{c} + \hat{d} = \hat{5} & (2) \\ \hat{2}\hat{a} + \hat{4}\hat{b} + \hat{2}\hat{c} + \hat{d} = \hat{1} & (3) \\ \hat{3}\hat{a} + \hat{3}\hat{b} + \hat{3}\hat{c} + \hat{d} = \hat{1} & (4) \\ \hat{4}\hat{a} + \hat{4}\hat{b} + \hat{4}\hat{c} + \hat{d} = \hat{5} & (5) \\ \hat{5}\hat{a} + \hat{b} + \hat{5}\hat{c} + \hat{d} = \hat{1} & (6) \end{cases}$$

Înlocuind $\hat{d} = \hat{1}$ obținem sistemul:

$$\begin{cases} \hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = \hat{4} & (2') \\ \hat{2}\hat{a} + \hat{4}\hat{b} + \hat{2}\hat{c} = \hat{0} & (3') \\ \hat{3}\hat{a} + \hat{3}\hat{b} + \hat{3}\hat{c} = \hat{0} & (4') \\ \hat{4}\hat{a} + \hat{4}\hat{b} + \hat{4}\hat{c} = \hat{4} & (5') \\ \hat{5}\hat{a} + \hat{b} + \hat{5}\hat{c} = \hat{0} & (6') \end{cases}$$

$(3') \leftrightarrow \hat{2}(\hat{a} + \hat{b} + \hat{c}) + \hat{2}\hat{b} = \hat{0}.$

Înlocuind din (2') obținem $\hat{2}\hat{b} = \hat{4}$, de unde $\hat{b} = \hat{2}$ sau $\hat{b} = \hat{5}$.

1) $\hat{d} = \hat{1}$, $\hat{b} = \hat{2}$ și sistemul: $\begin{cases} \hat{a} + \hat{c} = \hat{2} \\ \hat{2}\hat{a} + \hat{2}\hat{c} = \hat{4} \\ \hat{3}\hat{a} + \hat{3}\hat{c} = \hat{0} \\ \hat{4}\hat{a} + \hat{4}\hat{c} = \hat{2} \\ \hat{5}\hat{a} + \hat{5}\hat{c} = \hat{4} \end{cases}$

Rezultă: $\hat{a} = \hat{1}$, $\hat{c} = \hat{1}$, și $\hat{a} = \hat{2}$, $\hat{c} = \hat{0}$

2) $\hat{d} = \hat{1}$, $\hat{b} = \hat{5}$ și sistemul $\begin{cases} \hat{a} + \hat{c} = \hat{5} \\ \hat{2}\hat{a} + \hat{2}\hat{c} = \hat{4} \\ \hat{3}\hat{a} + \hat{3}\hat{c} = \hat{3} \\ \hat{4}\hat{a} + \hat{4}\hat{c} = \hat{2} \\ \hat{5}\hat{a} + \hat{5}\hat{c} = \hat{1} \end{cases}$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă : $\hat{a} = \hat{1}$, $\hat{c} = \hat{4}$; $\hat{a} = \hat{2}$, $\hat{c} = \hat{3}$; $\hat{a} = \hat{3}$, $\hat{c} = \hat{2}$; $\hat{a} = \hat{5}$, $\hat{c} = \hat{0}$.

Există 7 polinoame :

$$g_1 = x^3 + \hat{2}x^2 + x + \hat{1}$$
$$g_2 = \hat{2}x^3 + \hat{2}x^2 + \hat{1}$$
$$g_3 = x^3 + \hat{5}x^2 + \hat{4}x + \hat{1}$$
$$g_4 = \hat{2}x^3 + \hat{5}x^2 + \hat{3}x + \hat{1}$$
$$g_5 = \hat{3}x^2 + \hat{5}x^2 + \hat{2}x + \hat{1}$$
$$g_6 = \hat{4}x^3 + \hat{5}x^2 + x + \hat{1}$$
$$g_7 = \hat{5}x^3 + \hat{5}x^2 + \hat{1}$$

XX

96. Din ipoteză avem că :

$$f(a) \in [a, b],\ f(b) \in [a, b], \text{ și de aici}$$
$$|f(b) - f(a)| \leqslant |b - a| \qquad (1)$$

Pentru $x = b$, $y = a$ inegalitatea din enunț devine :

$$|f(b) - f(a)| \geqslant |b - a| \qquad (2)$$

Din (1) și (2) avem :

$$|f(b) - f(a)| = |b - a|, \text{ de unde :}$$
$$f(a) = a,\ f(b) = b \text{ sau } f(a) = b,\ f(b) = a.$$

Pentru orice $x \in [a, b]$ avem $a \leqslant f(x) \leqslant b$.

I) $f(a) = a$, $f(b) = b$

Avem $0 \leqslant f(x) - a = |f(x) - a| = |f(x) - f(a)| \geqslant |x - a| = x - a$.

Deci $f(x) - a \geqslant x - a$, de unde $f(x) \geqslant x$, $(\forall)\ x \in [a, b]$

$$0 \leqslant b - f(x) = |b - f(x)| = |f(b) - f(x)| \geqslant |b - x| = b - x.$$

Deci $b - f(x) \geqslant b - x$, de unde :

$$f(x) \leqslant x,\ (\forall)\ x \in [a, b].$$

$f(x) \leqslant x$ și $f(x) \geqslant x$ implică $f(x) = x$

II) $f(a) = b$, $f(b) = a$.

$$0 \leqslant f(x) - a = |f(x) - a| = |f(x) - f(b)| \geqslant |x - b| = b - x.$$

Deci $f(x) - a \geqslant b - x$, de unde $f(x) \geqslant b + a - x$, $(\forall)\ x \in [a, b]$.

$$0 \leqslant b - f(x) = |b - f(x)| = |f(a) - f(x)| \geqslant a - x| = x - a.$$

Deci $b - f(x) \geqslant x - a$, de unde $f(x) \leqslant b + a - x$, $(\forall)\ x \in [a, b]$

$f(x) \geqslant b + a - x$, $f(x) \leqslant a + b - x$ implică $f(x) = b + a - x$.

Scanned with OKEN Scanner

Deci, singurele funcții care verifică condiția din ipoteză sînt :

$$f(x) = x \text{ și } f(x) = b + a - x.$$

Pentru amîndouă avem $|f(x) - f(y)| = |x - y|$.

97. Fie $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$.
Egalitatea din enunț devine :

$$(a \cdot 1^3 + b \cdot 1^3 + c \cdot 1 + d) + (a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d) + \ldots +$$
$$+ (a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + c \cdot n + d) = n^4, \text{ echivalent cu}$$
$$a(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) + b(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) +$$
$$+ c(1 + 2 + \ldots + n) + nd = n^4$$

de unde :

$$a \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} + b \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + c \cdot \frac{n(n+1)}{2} + nd = n^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{4}(n^4 + 2n^3 + n^2) + \frac{b}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) + \frac{c}{2}(n^2 + n) + nd = n^4,$$

$$(\forall)\ n \in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow \frac{a}{4}n^4 + \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right)n^3 + \left(\frac{a}{4} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}\right)n^2 +$$
$$+ \left(\frac{b}{6} + \frac{c}{2} + d\right)n = n^4\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Identificînd coeficienții diferitelor puteri ale lui n obținem sistemul :

$$\begin{cases} \frac{a}{4} = 1 \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{3} = 0 \\ \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} = 0 \\ \frac{b}{6} + \frac{c}{2} + d = 0. \end{cases}$$

Rezolvînd obținem $a = 4$, $b = -6$, $c = 4$, $d = -1$.
Deci $P(X) = 4X^3 - 6X^2 + 4X - 1$.

98. Notăm $S_1 = a + b + c$, $S_2 = ab + ac + bc$, $S_3 = abc$.
Ecuația $x^3 - S_1x^2 + S_2x - S_3 = 0$.
are rădăcinile $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$.
Din ipoteză avem $S_2 > 0$.
Trebuie să demonstrăm că $S_1S_2 \neq S_3$.
Demonstrăm mai întîi că suma oricăror două dintre numerele a, b, c este diferită de zero. Presupunem că una din sume este egală cu zero. De exemplu $a + b = 0$. Înlocuim $b = -a$ în

$$ab + ac + bc > 0.$$

Obținem :

$$-a^2 + ac - ac < 0, \text{ adică } -a^2 < 0, \text{ fals.}$$

Rezultă că presupunerea este falsă, deci $a + b \neq 0$ și analog $a + c \neq 0$ și $b + c \neq 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Atunci $a+b+c \neq c$, $a+b+c \neq b$ și $a+b+c \neq a$, deci $S_1 \neq a$, $S_1 \neq b$, $S_1 \neq c$.
Rezultă că S_1 nu este rădăcină a ecuației. Înlocuind avem

$$S_1^3 - S_1^3 + S_2S_1 - S_3 \neq 0, \text{ de unde}$$

$$S_1S_2 \neq S_3.$$

99. Notăm cu Q cîtul împărțirii și ax^2+bx+c restul.
Avem $P = x(x-1)^2Q + ax^2 + bx + c$,
de unde $P(0) = c$

$$P(1) = a + b + c.$$

$$P'(X) = (X-1)^2Q(X) + 2X(X-1)Q(X) + X(X-1)^2Q'(X) + 2aX + b, \quad P'(1) = 2a + b.$$

Dar înlocuind în $P = x^{n_k} + x^{n_{k-1}} + \ldots + x^{n_1} + 1$

X cu 0 și 1 obținem:

$P(0) = 1$ și $P(1) = k + 1$.

Derivînd avem:

$$P'(X) = n_kX^{n_k-1} + n_{k-1}X^{n_{k-1}-1} + \ldots + n_1X^{n_1-1}.$$

se unde $P'(1) = n_k + n_{k-1} + \ldots + n_1 = A$ (notație).
Obținem sistemul:

$$\begin{aligned} c &= 1 \\ a+b+c &= k+1 \\ 2a+b &= A \end{aligned}$$

de unde $a = A - k$, $b = 2k - A$, $c = 1$, deci restul este

$$R = (n_k + n_{k-1} + \ldots + n_1 - k)x^2 + (2k - n_k - n_{k-1} - \ldots - n_1)x + 1.$$

100. Fie $\alpha_1(v_1 - v_2 + v_3) + \alpha_2(v_1 + v_2 - v_3) + \alpha_3(-v_1 + v_2 + v_3) = 0$
de unde rezultă:

$$(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)v_1 + (-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)v_2 + (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3)v_3 = 0.$$

Deoarece v_1, v_2, v_3 sînt liniar independenți avem:

$$(S) \quad \begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Observăm că $\det(S) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$

Atunci sistemul (S) este compatibil determinant și fiind omogen, admite numai soluția banală $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.
Deci, vectorii $v_1 - v_2 + v_3$, $v_1 + v_2 - v_3$, $-v_1 + v_2 + v_3$ sînt liniar independenți.

Scanned with OKEN Scanner

Stef Turism

IAŞI, Str. Lăpuşneanu nr. 16, Tel/Fax 0232-216749
e-mail: turism@stef.ro, www.stef.ro

Sărbătorile de Paşte 2005

Statiune / Localitate	Unitate de cazare	Descriere unitate de cazare	Tarif	Tariful include
Vatra Dornei	Hotel Carol 3*	Garsoniera (living + 1 dormitor), gr. s. pr., TV	725.000 lei 72,5 lei / pers/ zi	Cazare + MD, min 3 nopti. Optional dejun / cina: 300.000 lei /30 lei /zi/ pers
	Vila Zimbru 1* 29.04 – 03.05	Camera 2 locuri, TV, gr. s. pr.	1.500.000 lei 150 lei / pers/ sejur	Cazare 4 nopti
		Camera 2,3 locuri, TV, gr. s. com.	1.100.000 lei 110 lei / pers/ sejur	Cazare 4 nopti
Vatra Moldovitei	Pensiunea Marul de Aur 2* 29.04-02.05	Camere cu 2-3 locuri, incalzire centrala, baie proprie si pe hol	1.050.000 105 lei / pers/ sejur	Cazare 3 nopti in camere DBL.Optional: Masa traditionala: 200.000/20 lei.
			830.000 lei 83 lei / pers/ sejur	Cazare 3 nopti in camere 3-4 locuri Optional: masa traditionala: 200.000 / 20 lei
Gura Humorului	Vila Ramona 4* 29.04 – 02.05	6 dormitoare, un apartament cu living si semineu, sauna, un mic bar, bucatarie complet utilata, parcare 4 masini	2.400.000 240 lei / pers/ sejur	Cazare 3 nopti in DBL MD = 200.000 lei / zi / pers; cina = 500.000 lei / zi / pers
			1.750.000 lei 175 lei / pers/ sejur	Cazare 3 nopti in DBL (pat matrimonial) optional : MD = 200.000 lei / zi / pers; cina = 500.000 lei / zi / pers
			9.300.000 lei 930 lei/ apart/sejur	Cazare 3 nopti
Vama	Casa Calin 3* 29.04– 04.05	10 camere si un apartament 2 livinguri cu TV color, 2 terase. Camerele au TV si gr. s. pr.	240 € pers/ sejur	Cazare 5 nopti cina: 29.04; 01.05 ; 02.05 ; 03.05 Dejun sau cina : 30.04 Dejun special : 01.05
Voronet	Casa Elena 4* 29.04 – 02.05	Complex cu mai multe vile. Camerele dispun de TV si baie moderna; living cu bar si semineu, 2 terase, salon pentru MD, sauna, biliard, parcare, spatii de joaca.	6.900.000 lei 690 lei / pers/ sejur	Cazare 3 nopti, cina 29.04, cina festiva 30.04; cina festiva cu primire traditionala si program folcloric 01.05.2005
	Vila Doina 3* 29.04 – 03.05	5 camere a 2 paturi; 4 bai moderne, apa calda non-stop, sufragerie, living-room cu semineu, bucatarie complet utilata, centrala termica, terasa acoperita, parcare.	242 € / pers/ sejur	Cazare 4 nopti, DP, bufet traditional dupa slujba de inviere, pranz pascal, cu specific bucovinean
Slanic Moldova	Vila Adela 2*, Vila Palas 2* 29.04 – 02.05	Camere cu gr. s. pr., TV, balcon	2.390.000 lei 239 lei / pers/ sejur	3 nopti cazare + MD, cina festiva de Paste pe 01.05 la Restaurant Slanic, pranz de Paste
	Pensiunea Alex	10 – 12 locuri. Vila este compusa din parter + mansarda, 5 dormitoare, 3 balcoane, 2 bai + o bucatarie utilata mare. Centrala termica. TV in living	25.000.000 lei 2500 lei /vila/sejur	Cazare 3 nopti
Vanatori – Neamt	Centrul Social Cultural " Sf Paisie de la Neamt " 1*	Camere cu 2 locuri, gr. s. pr.	2.825.000 lei 282,5 lei / pers/ sejur	30.04 – 02.05.2005 cazare 3 nopti. Cina pe 30.04, dejun festiv si cina pe 1.05; MD pe 2.05
			5.300.000 lei 530 lei / pers/ sejur	30.04 – 3.05.2005 cazare 3 nopti; cina pe 30.04, 2 PC pe 1 si 2.04 (cu pranz festiv pe 1.05), MD pe 3.05
Durau	Hotel Bradul 3*	Camere cu 2 locuri, gr. s. pr., TV	2.500.000 lei 250 lei / pers/ sejur	Cazare 3 nopti, 1 masa festiva de Paste
	Hotel Brandusa 2*	Camere cu 2 locuri, gr. s. pr., TV	2.200.000 lei 220 lei / pers/ sejur	Cazare 3 nopti, 1 masa festiva de Paste

IAŞI, Str. Lăpuşneanu nr. 16, Tel/Fax 0232-216749 e-mail: turism@stef.ro, www.stef.ro

Scanned with OKEN Scanner

Durau	Vila Dalia 2* **29.04 – 02.05**	28 de locuri in camere cu 2 locuri; 2 camere au gr. s. pr., in rest cate 1 grup sau la 2 camere; living cu TV , bucatarie utilata	**1.500.000 lei** **150 lei / pers/ sejur**	Cazare 3 nopti, preferabil sa fie inchiriata la 1–2 grup.
	Pensiunea Cristal 2* **29.04 – 02.05**	12 locuri, in 6 camere, un living, baie, bucatarie utilata Se inchiriaza integral	**825.000 lei** **82,5 lei / pers/ sejur**	Cazare 3 nopti, 1 noapte suplimentara 275.000 / 27,5 lei / pers / zi
Botiza Maramures	Pensiuni Agroturistice 2* **29.04– 2.05**	4 – 8 locuri, se inchiriaza integral	**3.950.000 lei** **395 lei / pers/ sejur**	Cazare 3 nopti, PC, cina sau dejun festiv (inclusiv bautura casei), plimbare cu caruta
Poienile Izei - Maramures	Pensiuni Agroturistice 2* **29.04– 2.05**	Pensiunile dispun de 6 – 12 locuri se inchiriaza integral	**3.950.000 lei** **395 lei / pers/ sejur**	Cazare 3 nopti, PC, cina sau dejun festiv (inclusiv bautura casei), plimbare cu caruta
Sighetul Marmatiei	Casa Iurca de Calinesti 4* **29.04 – 3.05**	10 locuri, din care 2 camere cu 2 locuri, baie pr., o camera cu 2 loc + 1 pat rezerva, baie pr., un apartament cu 2 camere a cate 2 locuri, baie com., camere pentru nefumatori, TV, telefon, un mini bar, aer conditionat	**9.600.000 lei** **960 lei / pers/ sejur**	Cazare 4 nopti, masa (fara bautura, taxa de intrare la Manastirea Barsana , Cimitirul Vesel, cosul de Paste. plimbare cu sania Transportul la obiective nu este inclus.
Vadu Izei Maramures	Casa Muntean 2*	10 locuri la parter 1 camera cu baie, sala de mese, la etaj, 4 camere cu 2 paturi, 2 bai. Mobilier rustic. Casa dispune de ferma proprie.	**70 € / pers / sejur**	Cazare 3 nopti, DP + masa de Paste
			78 € / pers / sejur	Cazare 3 nopti PC + masa de Paste
Borsec	Vila 2* **29.04 – 02.05**	20 de locuri in 10 camere cu 2 locuri, gr. s. pr.	**750.000 lei** **75 lei / pers/ sejur**	Cazare 3 nopti 1 noapte suplimentara 250.000 lei / pers / zi
Sovata	Vila 2* 29.04 – 02.05	Camere cu 2 locuri , gr. s. pr.	1.050.000 105 lei / pers/ sejur	Cazare 3 nopti, 1 noapte suplimentara 350.000/ 35 lei /pers/ zi
Tusnad	Hotel Fortuna 3* **30.04 – 02.05**	Cazare in camera 2 loc. cu gr. s. pr TV, telefon, balcon	**98 € / pers / sejur**	2 nopti cazare in camera cu pat dublu sau matrimonial, mic dejun (1,2 mai), pranz (01 mai), miel la protap, cina (30.04 , 01.05)
Bran	Complex Angelica 2*	2 vile insemnand 25 camere cu baie pr. si 6 camere cu 1 baie la 2 camere. Camere cu baie pr. cu TV. Alte facilitati: restaurant, discoteca, pastravarie, parcare,	**1.125.000 lei** **112,5 lei / pers/ sejur**	3 nopti cazare in camere cu gr. s. pr. , 1 noapte suplimentara = 375.000 lei 37,50 lei / pers / zi, optional masa festiva 400.000/40 lei/pers/zi PC 400.000/40 lei/zi
			975.000 lei **97,5 lei / pers/ sejur**	3 nopti cazare in camere cu gr. s. com.; optional masa festiva 400.000 / 40 lei/pers/zi PC-400.000/ 40 lei/zi
	Vila Rodica 2*	30 locuri in 13 camere cu 2 locuri + 3 camere cu 4 locuri (2 paturi duble), 7 gr. s.; sala de restaurat, loc de joaca, teren volei, pastravarie, parcare	**70 €/pers/sejur**	3 nopti cazare cu 3 mese/zi, masa festiva de Paste
	Pensiunea Mama Cozonacilor 2*	10 locuri in 5 camere duble cu gr. s, pr., TV, si balcon	**110 €/pers/zi**	3 nopti cazare cu PC/zi, masa festiva de Paste
	Pensiunea Bucegi 2 margarete **29.04-02.05**	Pensiunea este compusa din 2 cladiri. Prima cladire are 7 camere cu pat matrimonial, 3 bai, sala de mese (25 locuri),bucatarie, magazin si bar de zi. A doua cladire: 4 camere cu pat matrimonial, 2 camere cu bai proprii, sala de mese (14 locuri). Alte facilitati: incalzire centrala, gradina, vara, loc de joaca, teren sport, pastravarie., parcare.	**1.200.000 lei** **120 lei / pers/ sejur**	3 nopti cazare in camera cu baie proprie optional 1 noapte cazare: 400.000 lei/pers. MD=110.000 / 11 lei Dejun = 220.000 / 22 lei Cina=110.000 / 11 lei
			1.050.000 lei **105 lei / pers/ sejur**	3 nopti cazare in camera cu baie pe hol optional 1 noapte cazare = 350.000 lei, MD =110.000 / 11 lei Dejun = 220.000 / 22 lei Cina=110.000 / 11 lei

Scanned with OKEN Scanner

1. Mecanismul de producere a hipertensiunii pulmonare de BPOC
2. Mecanismul de acțiune a antihipertensivelor de asteml bronșic.
3. Diagnostic diferențial pneumonii virale și bacteriene.
4. Cauzele stării de rău astmatic.
5. Complicațiile stenozei mitrale
6. Rezultatele și fenocardiograma de stenoză aortică compensată și decompensată.
7. Tratamentul edemului pulmonar cardiogen
8. Tratamentul șocului cardiogen.
9. Tratamentul în chirurgia de urgență a atriale cronică.
10. Manevre vagale și mediatori de tahicardie paroxistică supraventriculară.
11. Tulburări (hematologice) de leucoze acute
12. Mecanismul de producere a anemiilor hemolitice medicamentoase.
13. Complicațiile sclerozei multiple

14. Examenul de laborator în pielonefrita cronică.
15. Cauzele de insuficiență renală cronică - enumerare
16. Manifestările cardiovasculare de insuficiență renală cronică
17. Tratamentul dietetic în cirroza hepatică
18. Grupa Sulfon în Hemul de cancer: doze, modalități, efecte adverse.
19. Cauzele comei cetoacidozice.
20. Diagnosticul comei hiperosmolare.
21. Complicațiile insulinoterapiei
22. Mecanismul de producere al glomerulonefritei cronice prin complex imun.
23. Enumerați bolile și medicamentele care dau litiază renală
24. Etiologia pleureziilor.
25. Mecanismul de acțiune al β blocantelor în cardiopatia ischemică.
26. Modificări anatomo-patologice în hepatita cronică
27. Cardita reumatică - diagnostic.
28.
29
30

Ipercalciuria - bronchi aperti + ventilatore ovidizzano aumento
e ostruzione bronchiolare fatto da diverse substanze (mediatori chimici, agenti
fisici, temperatura ecc.) - 15-30% dei pazienti asmatici ha anche
ipersensibilità bronchiale - acidosi calcio dei basofili ed eosinofili
- modificazioni morfologiche (ipertrofia, iperplasia)
funzionale ecc.
- turbolenza alle regioni contribuiscono anche
bronchiolo
- esistono accumulazioni plasmatiche
tista
- presenza di mediatori aumentati in
più precisa a mediatori presenti
- ipersensibilità reattività ai agenti
ai plasminuli

Extrapolăm la reacțiile alergice

Rtp I (Mediată prin Ac. IgE) → complex Ag-Ac. IgE → IgE fixate pe (mastocite, bazofile) → degranulare bazofile → (eliberează mediatori)

(produși în exces pot fi toxici pentru țesuturi)

Rtp II (Citotoxică) → complex Ag-Ac. IgG, IgM → activare complement (C3) → (Ac. circulanți (precipitine))

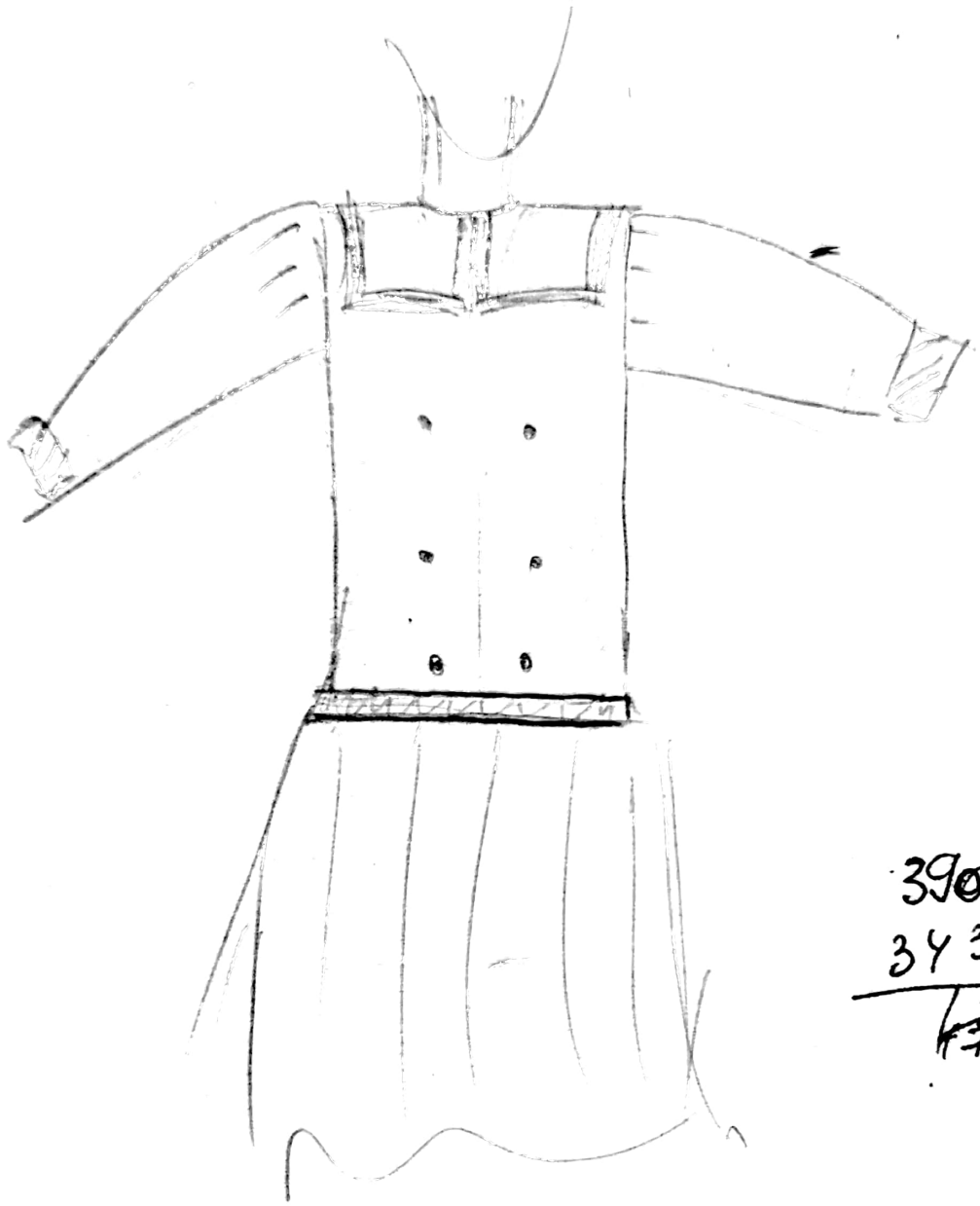
Rtp III (Prin complexe imune) → complex Ag-Ac. IgG, IgD, IgM → activare complement (C3) → (Ac. circulanți (precipitine))

- Rtp cu reacție întârziată, la 4-8 ore
(Rtp. mediată alergenului specific (Fn. extracelulară Vandivă macrofagică))

Obs. alte afecț. asp. cu mec. imunitar (citotoxic):
- plămânul de fermier
- astmul alergic
- rinofaringita cu eozinofile
- alveolita alergică
- fibroza pulmonară.

Obs. Rtp întârziată, exprimată de limfocitele Vandivă, e cele critice pentru care declanșată de o reacție inițială de tip IgE, putând avea diverse forme de prezentare: simplă de febră și leucocitoză.

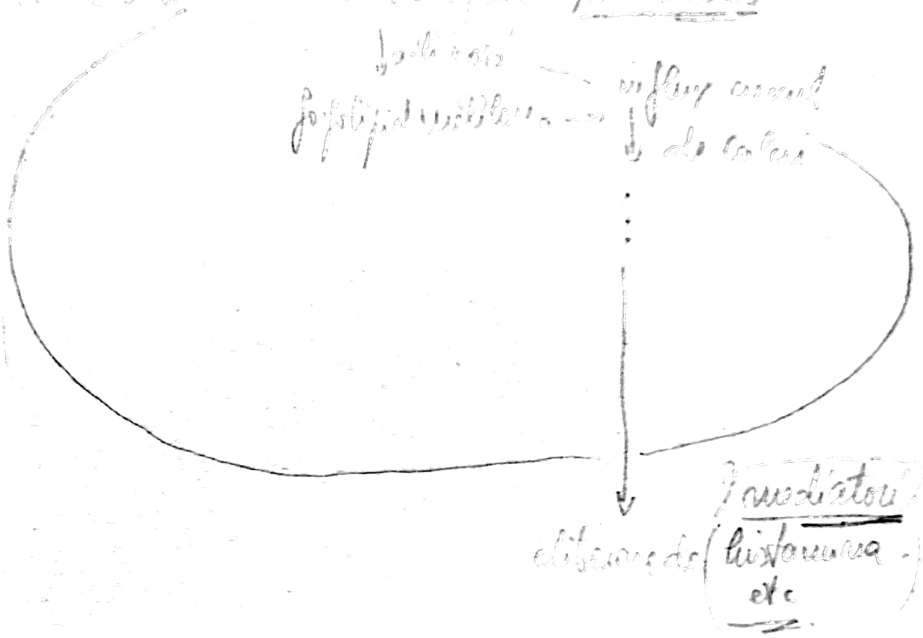
Scanned with OKEN Scanner



6.

390 -
343
41 pagini

Scanned with OKEN Scanner



mediatori eliberați sunt de 2 tipuri:

1. mediatori primari (preformați)
   - histamină
   - serotonină
   - bradikinină
   - factorul eozinofil chimiotactic
   - enzime (sulfatază A, chimaze)

2. mediatori secundari (sinteză de novo)
   - SRS-A (complex de leucotriene LTC_4, D_4, E_4 - acțiune mult prelungită față de cele primare)
   - factorul agregant plachetar
   - factorul activator plachetar - FAP - (este de mai mare anvergură decât histamina)
   - factori chimiotactici pentru eozinofile, neutrofile.

Scanned with OKEN Scanner

Ipoacusia bilaterale [illegible]

- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]

Scanned with OKEN Scanner